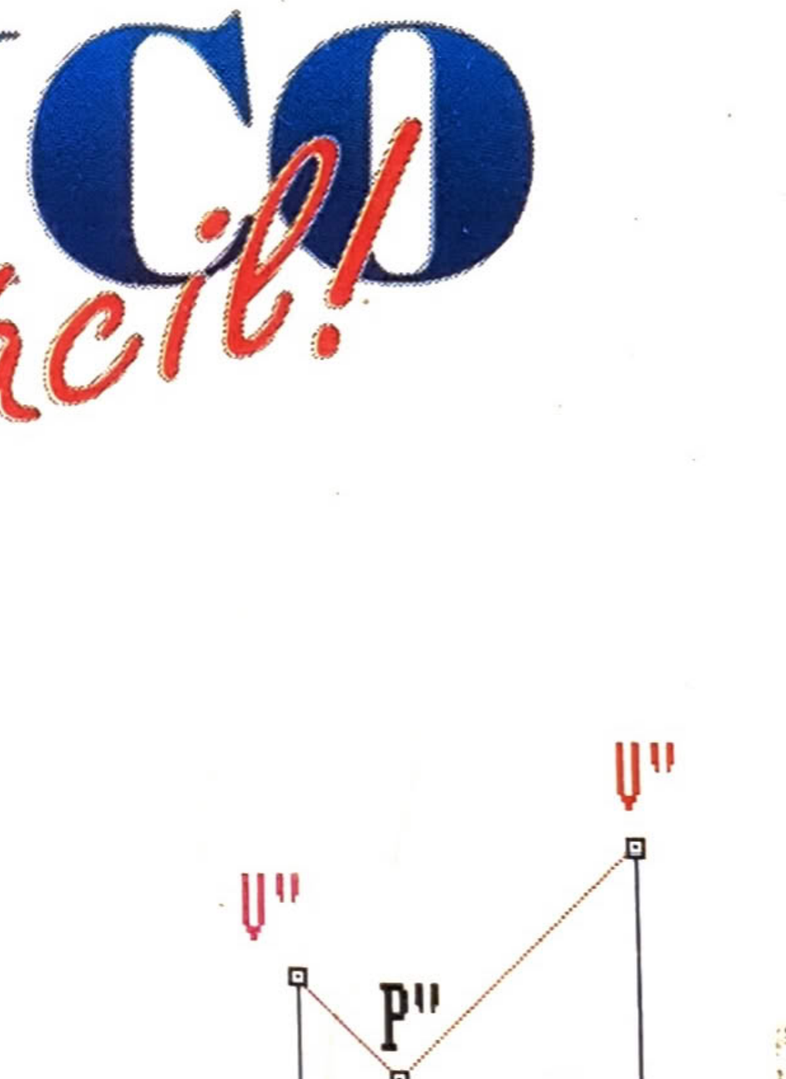
Manuel M. López Vázquez.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

SISTEMA DIEDRICO

¡Así, más fácil!



4.1

Manuel M. López Vázquez
Ingeniero Técnico
Profesor Titular de la
Escuela U. de Ingeniería T.
Naval de Cádiz.

Geometría Descriptiva

Sistema Diédrico

1ª Edición.

Dedicatoria:

Quiero dedicar esta obra a mi mujer, y a mis dos hijas, puntos fundamentales para definir ese plano donde yo, como un punto más de él, me encuentro formando entre todos algo tan importante como es la "familia".

Manuel M. López Vázquez.

Prólogo.

Quiero encaminar esta obra, a todos aquellos alumnos que intentan iniciarse en el estudio de la Geometría Descriptiva, sin tener los suficientes conocimientos de la Geometría Métrica.

El método seguido, anima al alumno al estudio continuado de esta disciplina, intentando inculcarle unos conocimientos básicos a través, de una exposición, clara y sencilla, de los distintos conceptos fundamentales.

Para facilitar al alumno la comprensión y familiarización de este conjunto de conocimientos básicos, teniendo en cuenta las dificultades que el sistema pueda presentar, he creído conveniente utilizar, algo tan importante en la expresión gráfica como es el "color".

Espero que esta innovación, atraiga la atención del alumno, y se encuentre más estimulado para que, sin tedio, pueda seguir su andadura en el amplio campo de la Geometría Descriptiva.

Si como resultado de esta obra, consiguiera, tan sólo, facilitar al alumno el entendimiento de esta disciplina, os prometo, desde estas líneas, que no descansaré de investigar en este campo, para que los resultados sean todo lo útil que el alumno necesita.

EL AUTOR

Manuel M. López Vázquez

1992.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

SISTEMA DIEDRICO

INDICE

		Página
Tema 1:	Alfabeto del punto	15
Tema 2:	Alfabeto de la recta	27
Tema 3:	Alfabeto de plano	41
Tema 4:	Puntos y rectas contenidas en planos	55
Tema 5:	Intersección de planos	67
Tema 6:	Paralelismo	79
Tema 7:	Perpendicularidad	93
Tema 8:	Abatimientos	101
Tema 9:	Distancias	113
Tema 10:	Representación de poliedros, prismas y pirámides	123
Tema 11:	Secciones planas	135
Tema 12:	Desarrollos y transformadas de poliedros y cuerpos de revolución	147

Alfabeto del punto.

ALFABETO DEL PUNTO

En el sistema diédrico emplearemos, principalmente, dos planos de proyección, que se cortarán perpendicularmente.

Uno de ellos se supone *horizontal* , siendo, por tanto, el otro, *vertical* ; la intersección de ambos planos será una recta que denominaremos, "LINEA DE TIERRA".

La línea de tierra, (L.T.) dividirá a ambos planos de proyección en cuatro "semiplanos". (Ver figura Nº 2).

El espacio quedará, por tanto, dividido en cuatro zonas o cuadrantes.

* 1er cuadrante (zona comprendida entre los semiplanos horizontal anterior y vertical superior).
* 2º cuadrante (zona comprendida entre los semiplanos vertical su- perior y horizontal posterior).
* 3er cuadrante (zona comprendida entre los semiplanos horizontal posterior y vertical inferior).
* 4º cuadrante (zona comprendida entre los semiplanos vertical inferior y horizontal anterior).

PLANOS BISECTORES

Dos planos perpendiculares entre sí, cuya intersección coincida con la línea de tierra y estén girados 45°respecto a los planos de proyección, lo denominaremos "planos bisectores".

Dichos planos dividirán el espacio en ocho octantes.

El primer bisector atraviesa los cuadrantes 1º y 3º, mientras que el 2º atraviesa los cuadrantes 2º y 4º.

POSICIONES DE LOS PUNTOS EN EL ESPACIO

Los puntos en el espacio pueden ocupar 17 posiciones, según se encuentren situados en los distintos cuadrantes, bisectores, plano horizontal, plano vertical, o línea de tierra. (Ver figura Nº 1).

Las proyecciones de los distintos puntos en el espacio sobre los planos de proyección, serán siempre ortogonales, es decir, proyecciones perpendiculares a los planos, horizontal y vertical.

En la figura nº 2 podemos observar los puntos del espacio 1-2-3 y 4, situados en los cuadrantes 1º, 2º, 3º y 4º, respectivamente.

En cualquiera de los cuatro casos podemos observar las imágenes primas (') y segundas (") sobre los planos horizontal y vertical respectivamente.

PUNTO 1 ..... 1' en el H.A. y 1" en el V.S.
PUNTO 2 ..... 2' en el H.P. y 2" en el V.S.
PUNTO 3 ..... 3' en el H.P. y 3" en el V.I.
PUNTO 4 ..... 4' en el H.A. y 4" en el V.I.

Los valores 11', 22', 33' y 44' son respectivamente las distancias de los puntos 1-2-3 y 4 al plano horizontal (cota), siendo positivas las 1-1' y 2-2' por estar ambos puntos (1 y 2) sobre el plano horizontal mientras que 3-3' y 4-4' son negativas por estar los puntos (3 y 4) bajo el plano horizontal.

Los valores 1-1", 2-2", 3-3" y 4-4" son, respectivamente, las distancias de los puntos 1-2-3 y 4 al plano vertical (alejamiento), siendo positivas 11" y 44" por estar ambos puntos (1 y 4) delante del plano vertical, mientras que 22" y 44" son negativas por estar los puntos (2 y 4) detrás del plano vertical.

En la figura nº 3 podemos observar los valores positivos (+) o negativos (-), tanto de las cotas como de los alejamientos de los distintos puntos, según su posición en el espacio. (ver figura nº 1).

En las figuras 4-5 y 6, hemos representado las 17 posiciones del punto, indicándose en ellas sus proyecciones, tanto horizontal como vertical, así como los valores absolutos de sus 2 proyecciones: COTA y ALEJAMIENTO.

REPRESENTACION DE LOS PUNTOS EN EL SISTEMA DIEDRICO.

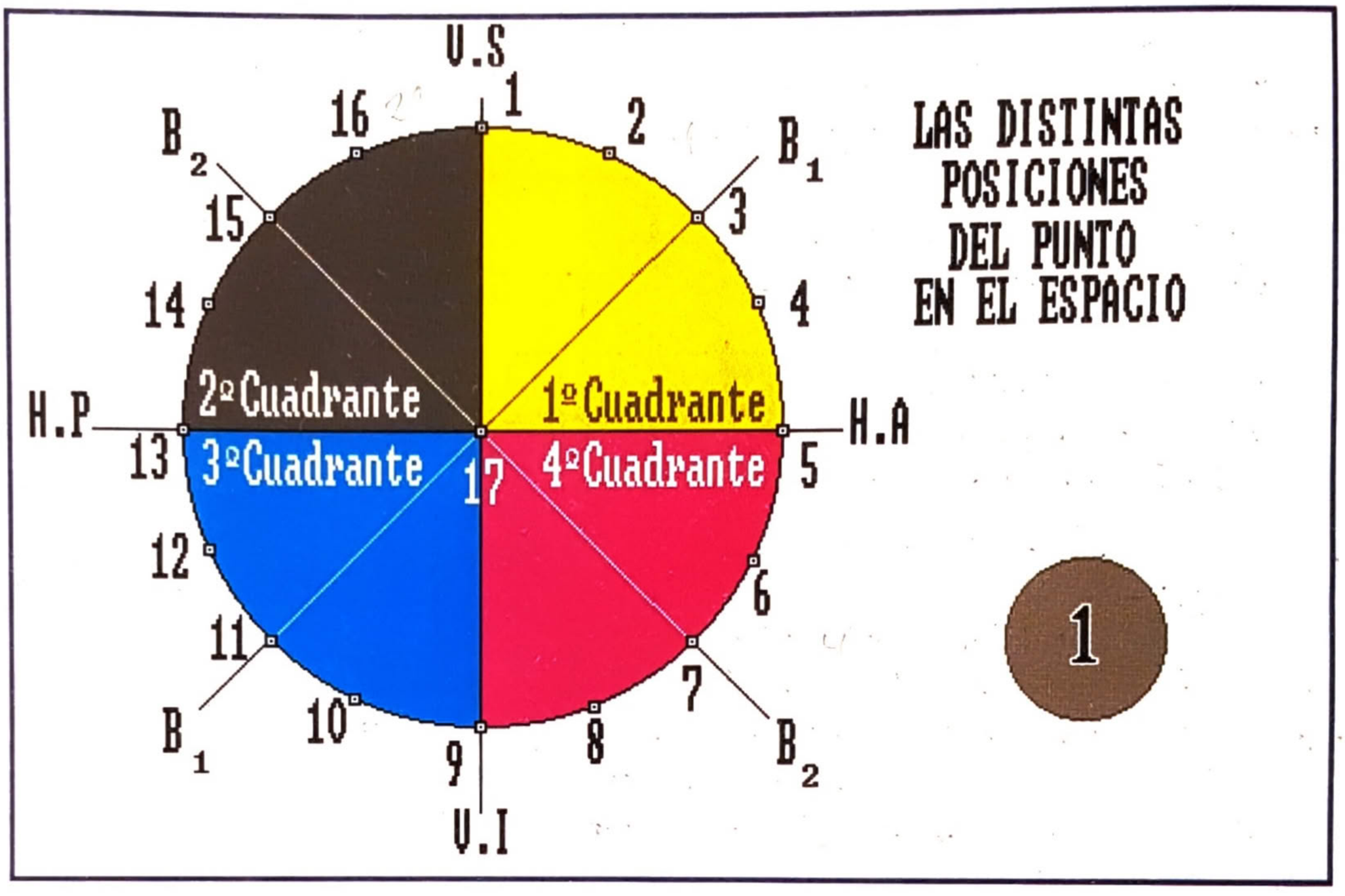
Para poder representar los distintos puntos del espacio en el sistema diédrico es necesario seguir el siguiente procemiento:

1º.- Las proyecciones prima (') y segunda (") estarán siempre en una perpendicular a la línea de tierra.

2º.- Cualquier punto del espacio será proyectado ortogonalmente sobre el plano horizontal y sobre el plano vertical.

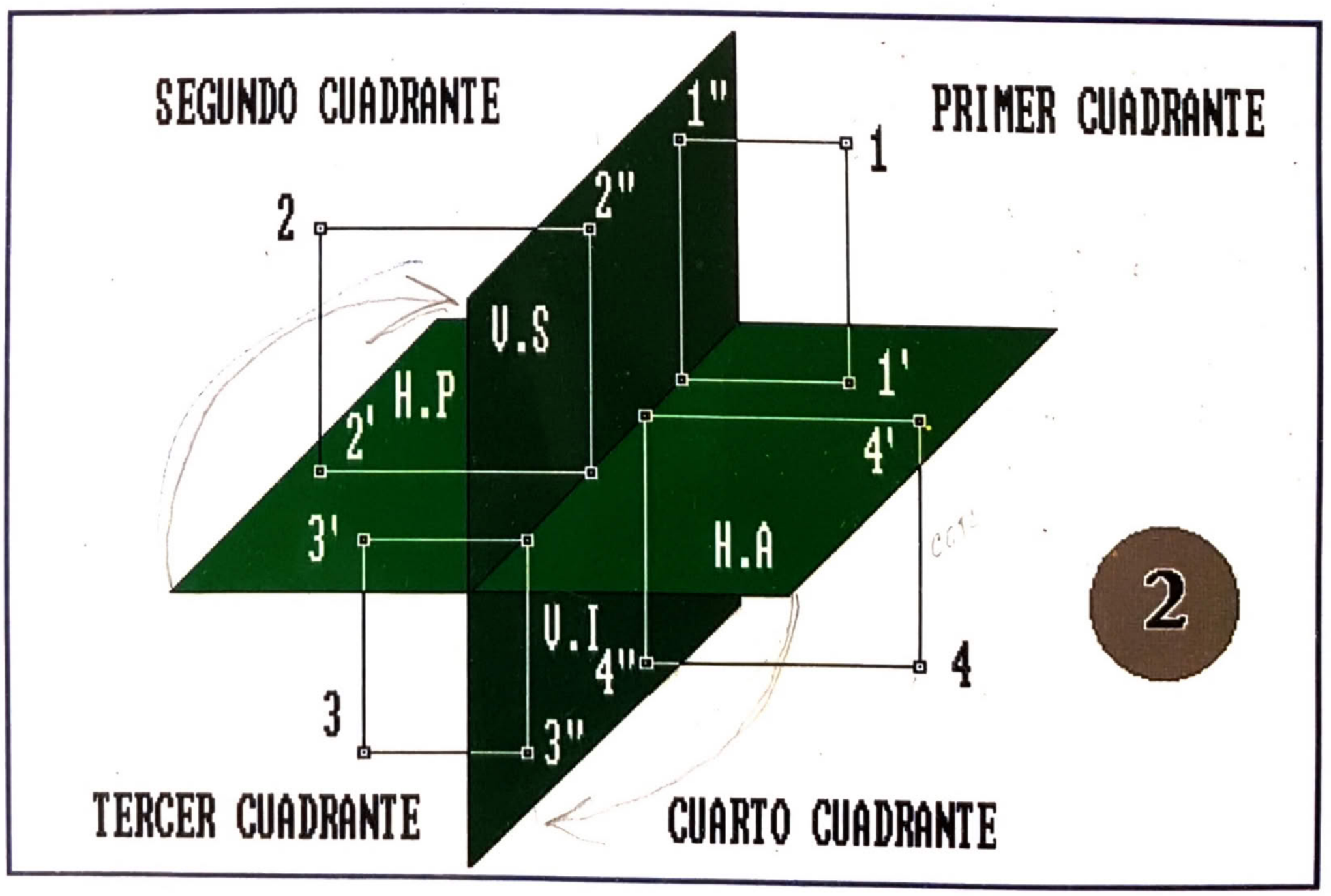
3º.- Una vez obtenidas las proyecciones ortogonales de cualquier punto del espacio, sobre los planos de proyección procederemos a girar el plano horizontal, tomando como eje de giro la línea de tierra, haciendo coincidir el semiplano horizontal anterior con el semiplano vertical inferior, consecuentemente el horizontal posterior coincidirá con el vertical superior.

Una vez efectuado el giro del plano horizontal , las proyecciones ortogonales de los distintos puntos contenidos en él, ocuparán una nueva posición en el plano vertical.



LAS DISTINTAS POSICIONES DEL PUNTO EN EL ESPACIO

1



2

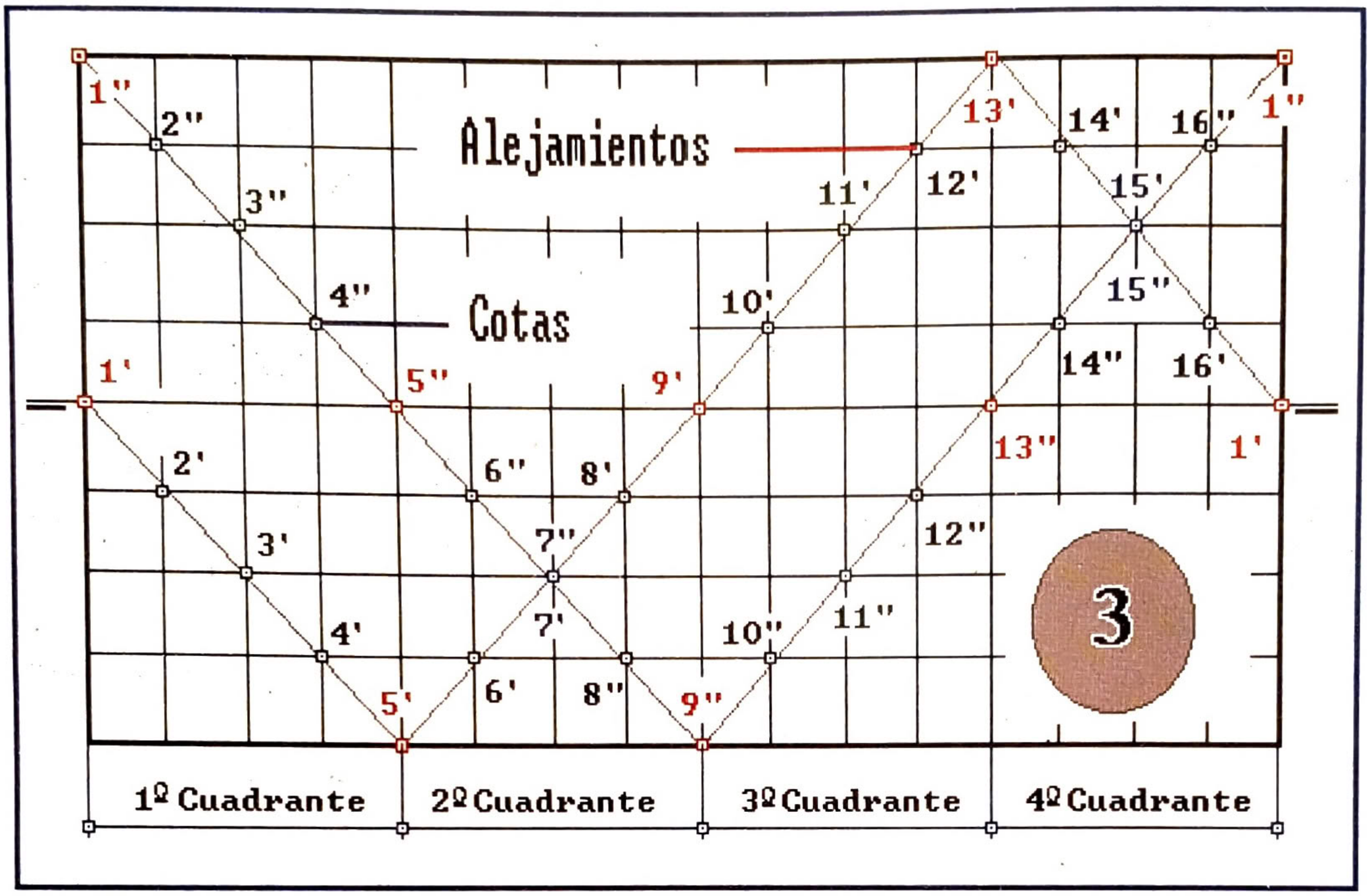
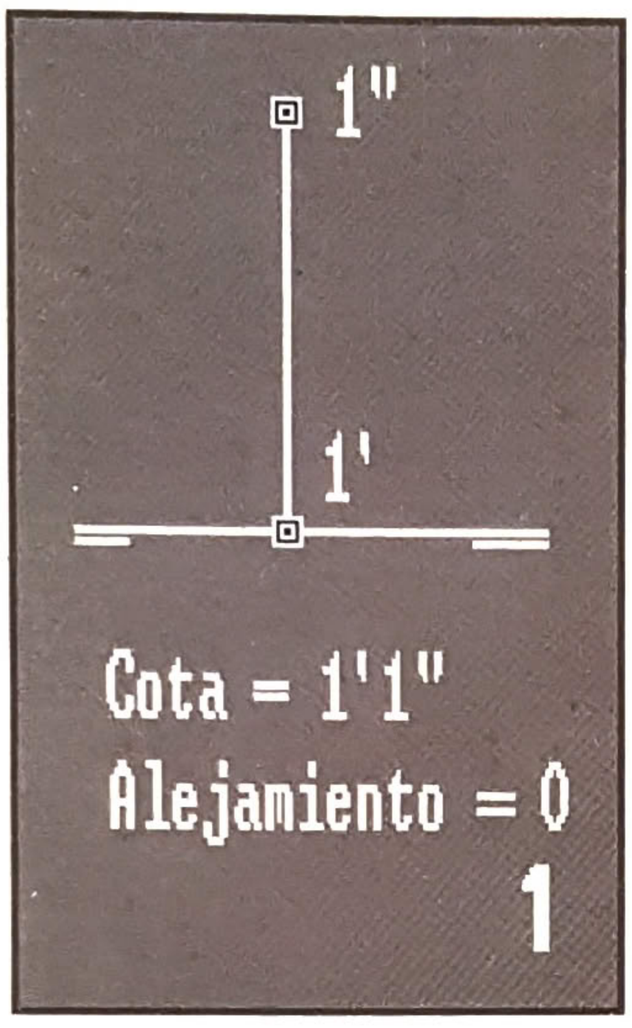
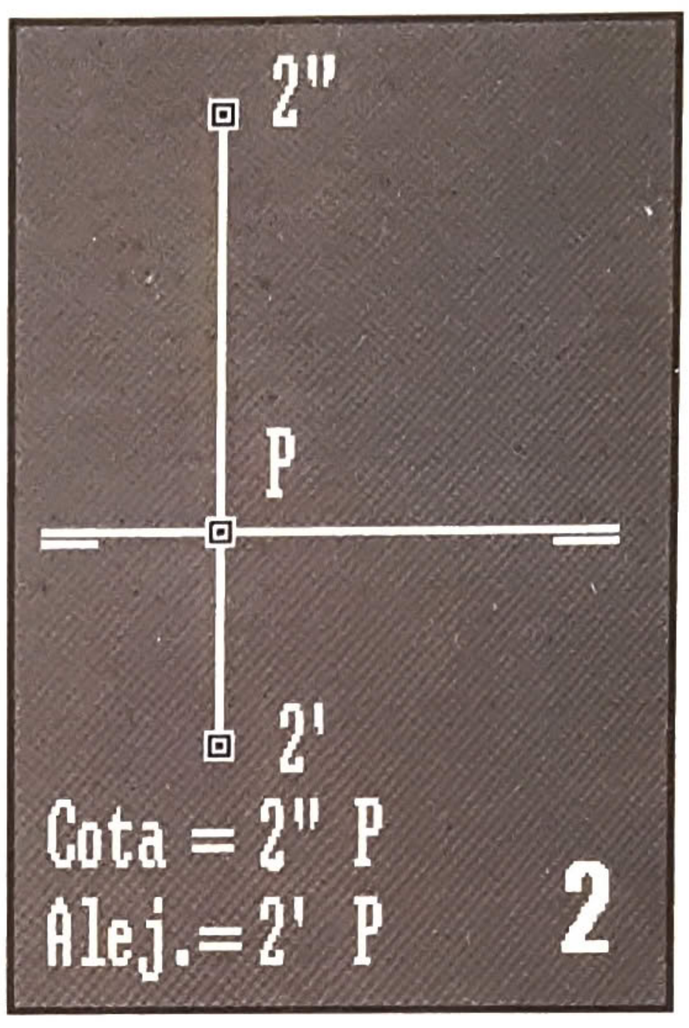


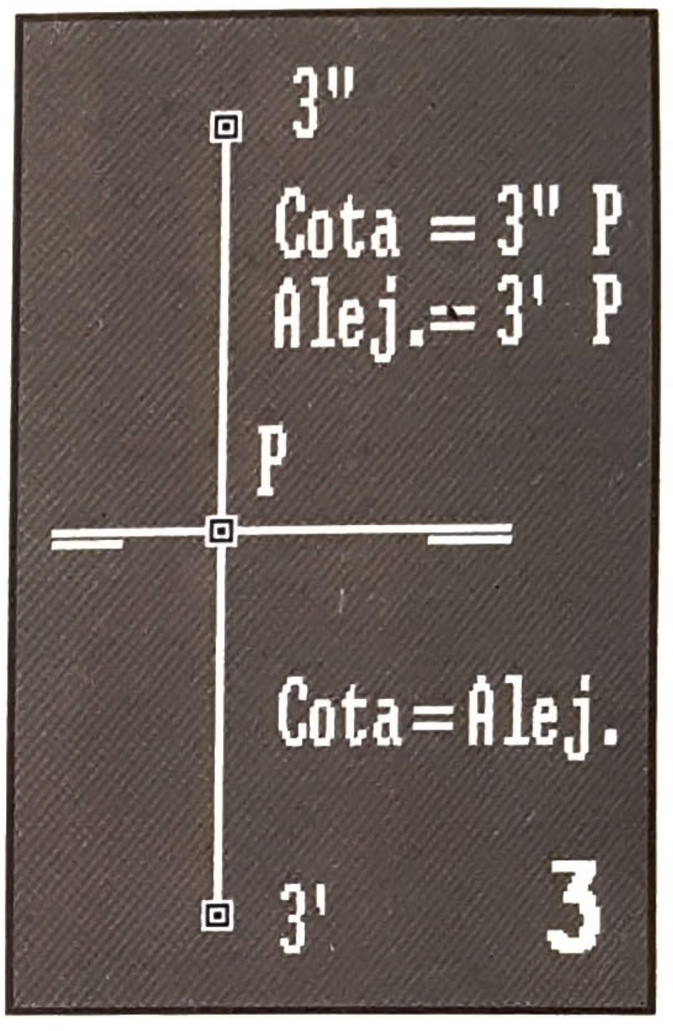
GRAFICO PARA DETERMINAR LOS VALORES POSITIVOS O NEGATIVOS DE LAS COTAS Y ALEJAMIENTOS DE LOS DIS - TINTOS PUNTOS , SEGUN SU POSICION EN EL ESPACIO.

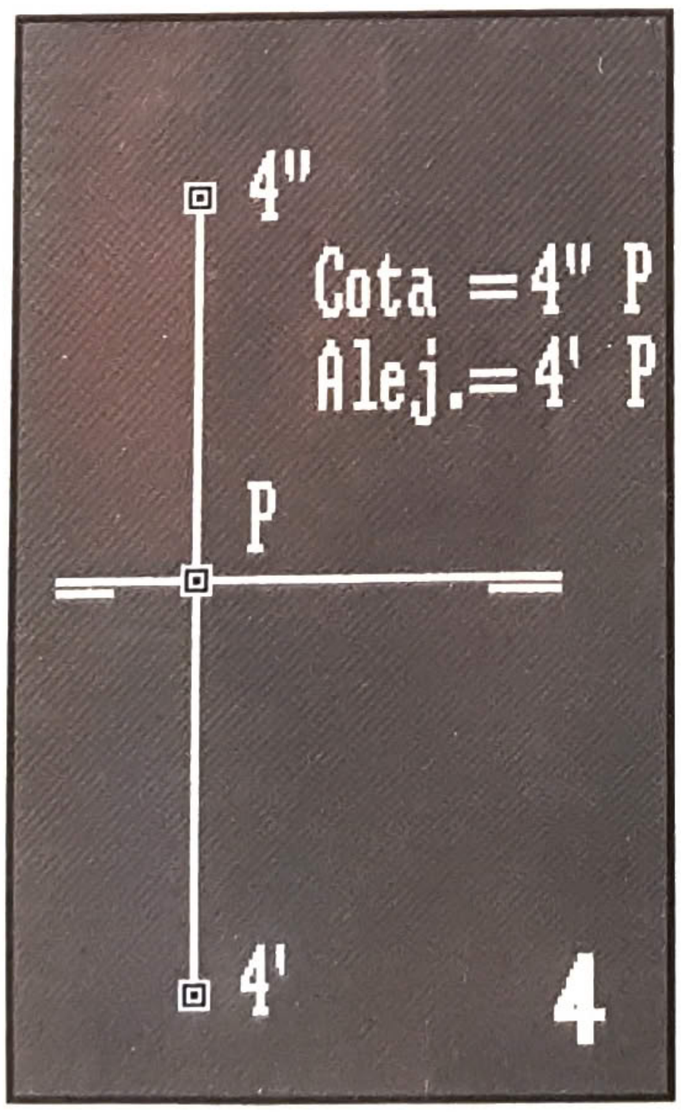
SOBRE L.T ..... COTAS (+) ALEJAMIENTOS (-)

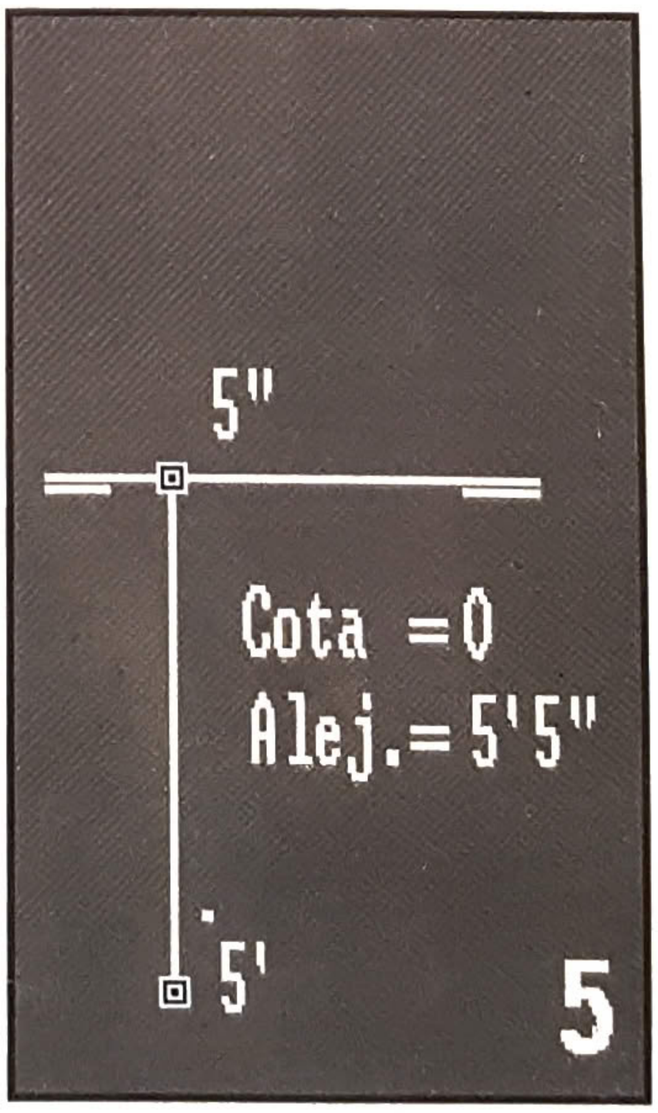
BAJO L.T ..... COTAS (-) ALEJAMIENTOS (+)

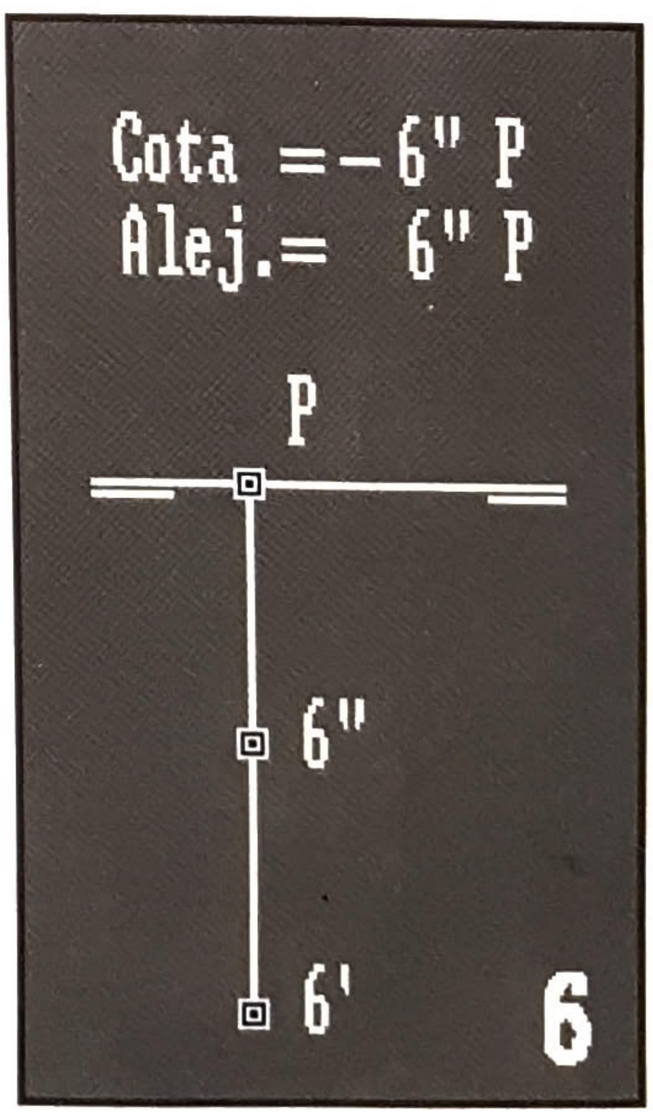

1"
1'
Cota = 1'1"
Alejamiento = 0
1


2"
P
2'
Cota = 2" P
Alej.= 2' P
2

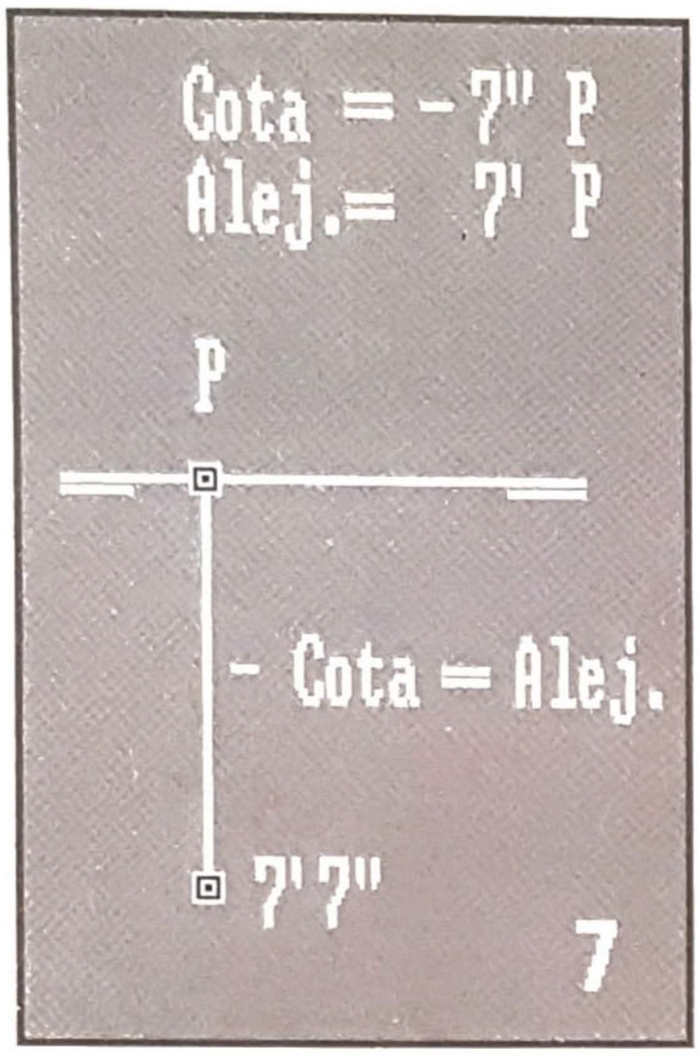

3"
Cota = 3" P
Alej.= 3' P
P
Cota=Alej.
3'
3

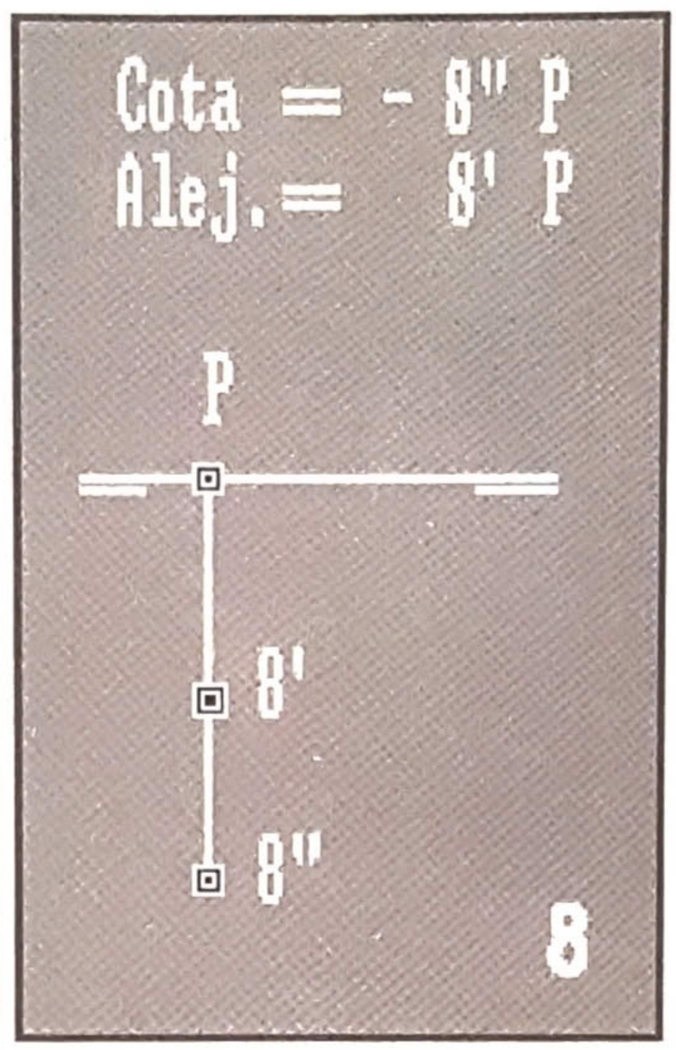

4"
Cota =4" P
Alej.=4' P
P
4'
4

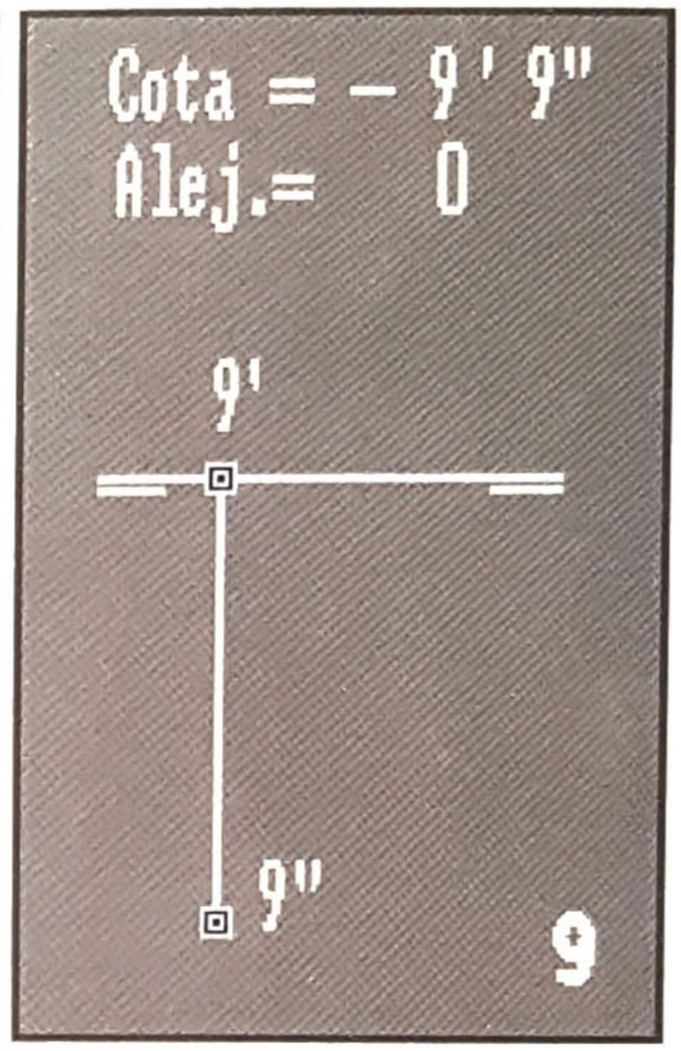

5"
Cota =0
Alej.=5'5"
5'
5

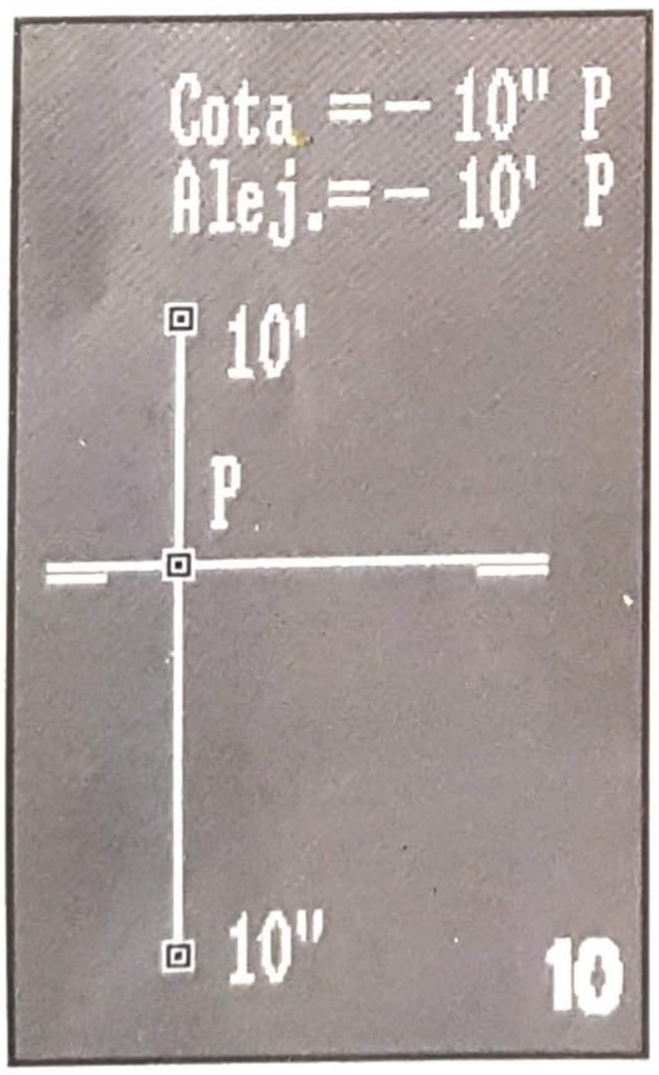

Cota =-6" P
Alej.= 6" P
P
6"
6'
6

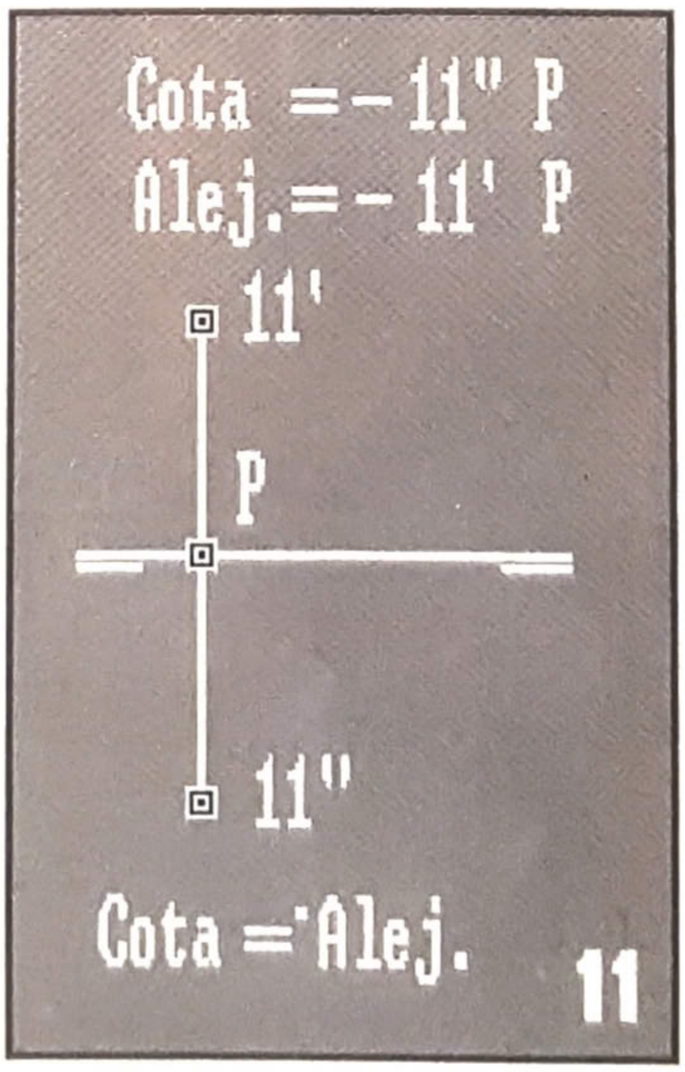
4

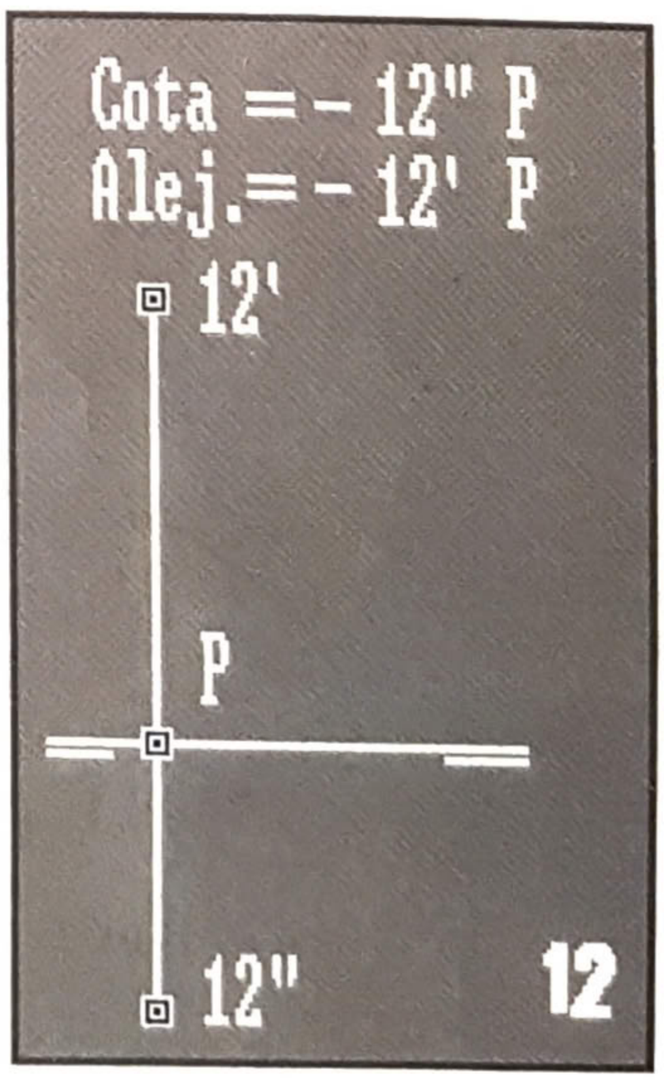

Cota = -7" P
Alej.= 7' P
P
- Cota = Alej.
7' 7"
7

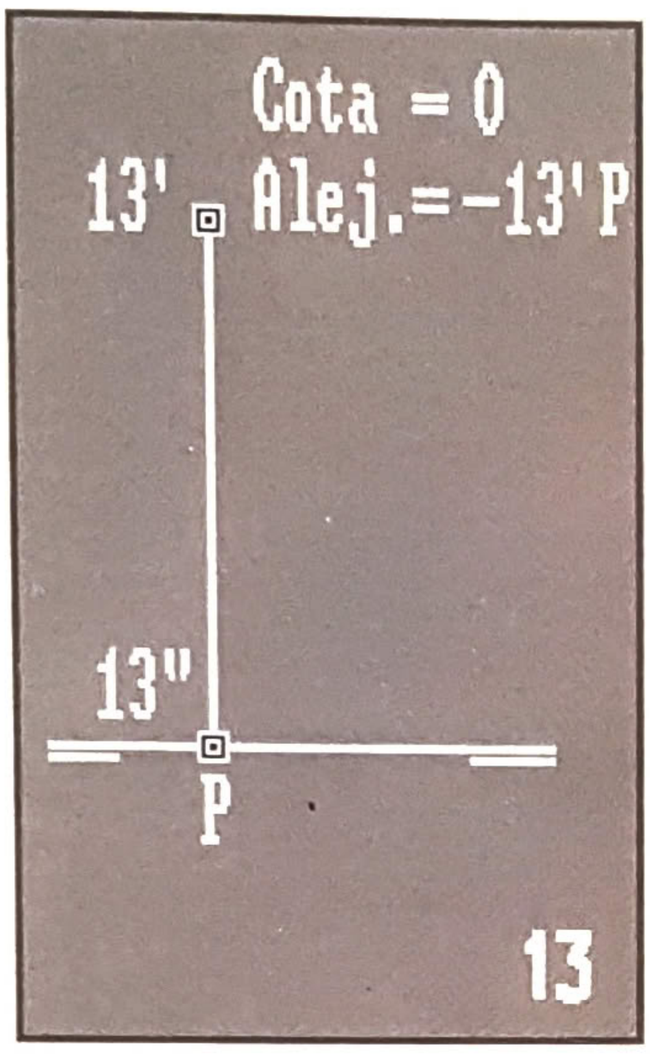

Cota = - 8" P
Alej.= 8' P
P
8'
8"
8

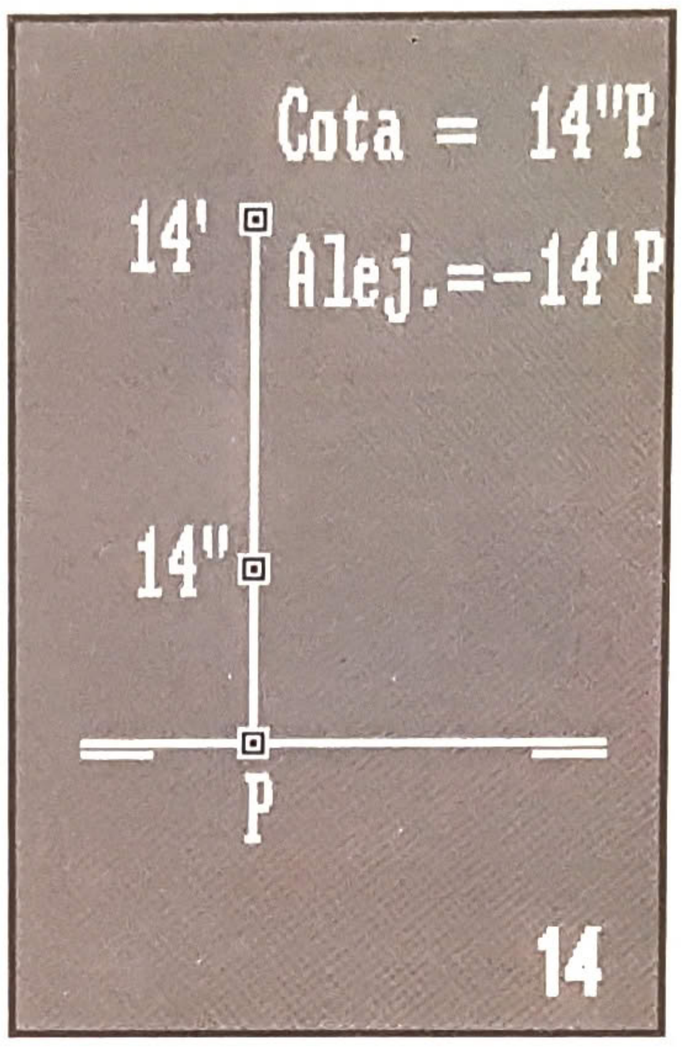

Cota = - 9' 9"
Alej.= 0
9'
9"
9

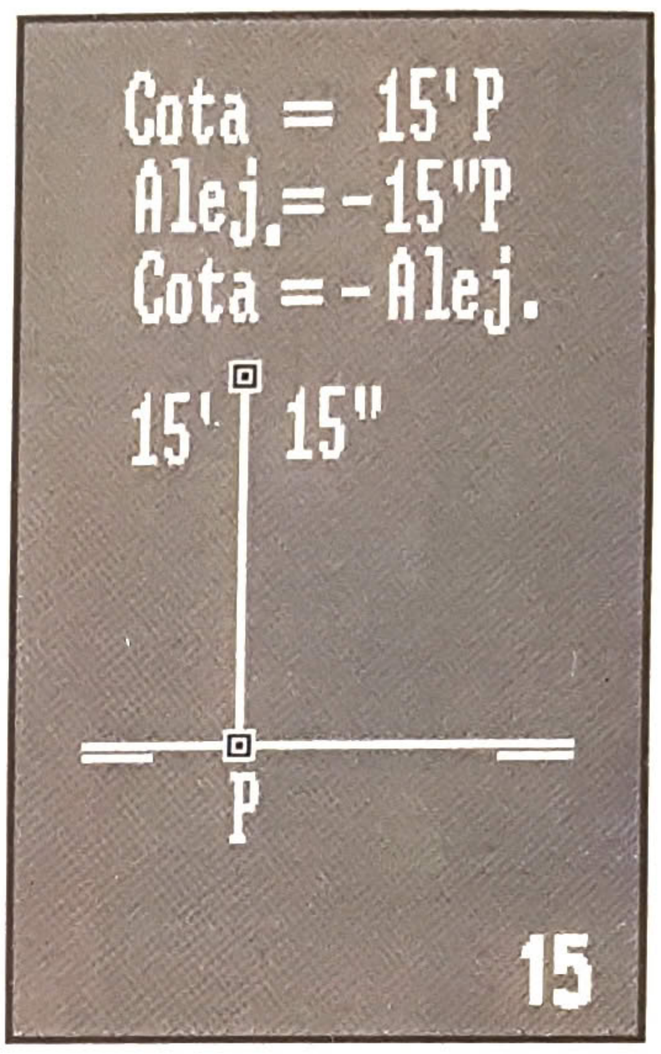

Cota =- 10" P
Alej.=- 10' P
10'
P
10"
10

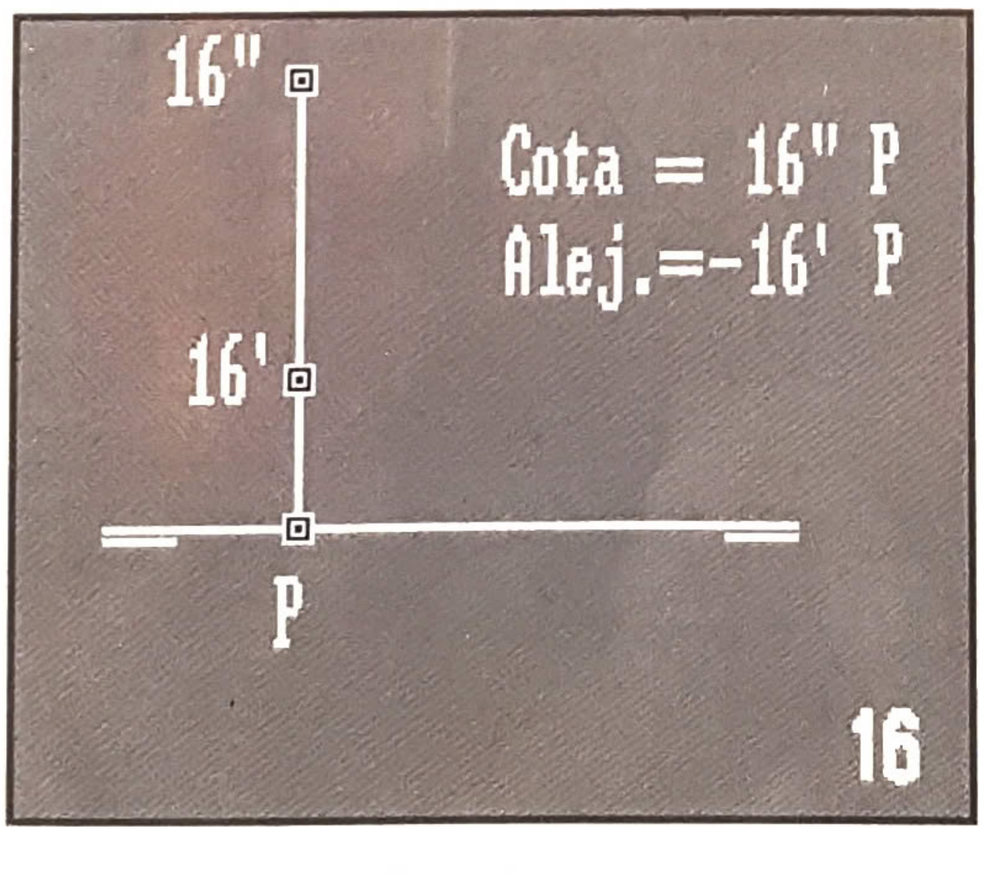

Cota =- 11" P
Alej.=- 11' P
11'
P
11"
Cota = Alej.
11

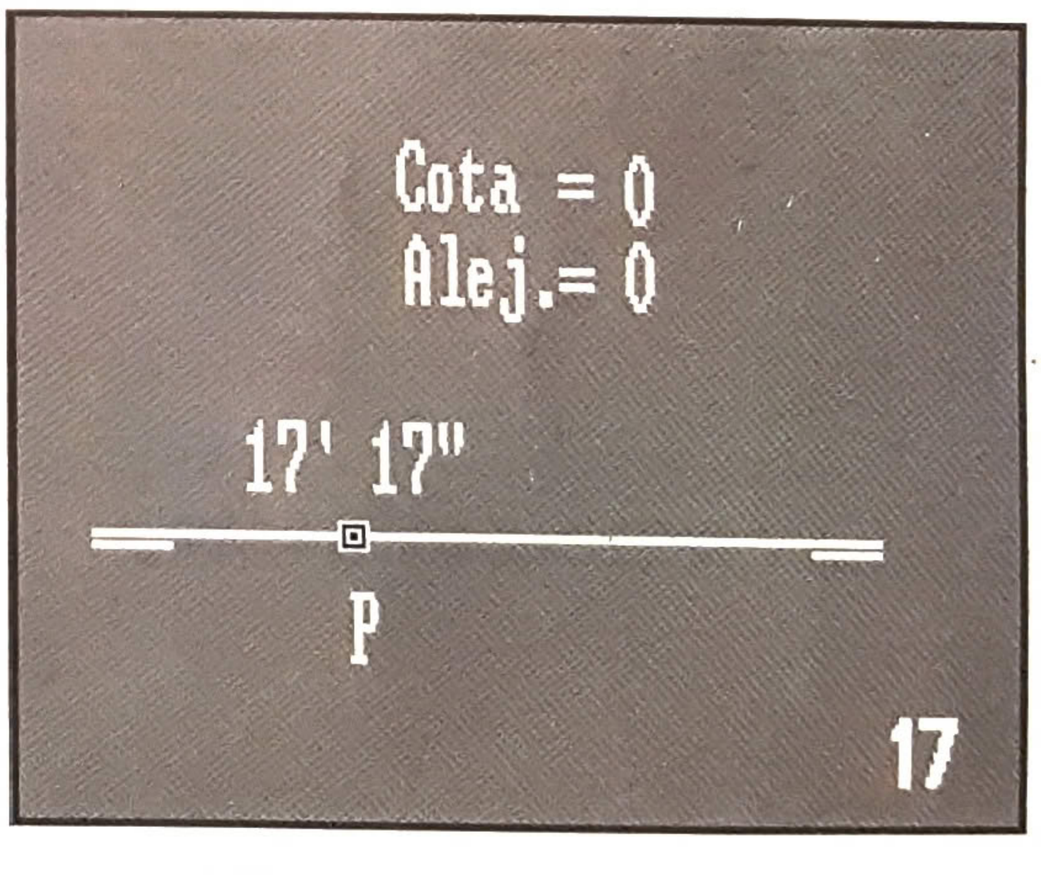

Cota =- 12" P
Alej.=- 12' P
12'
P
12"
12











Representación en el SISTEMA DIEDRICO de las distintas posiciones de los puntos en el espacio.

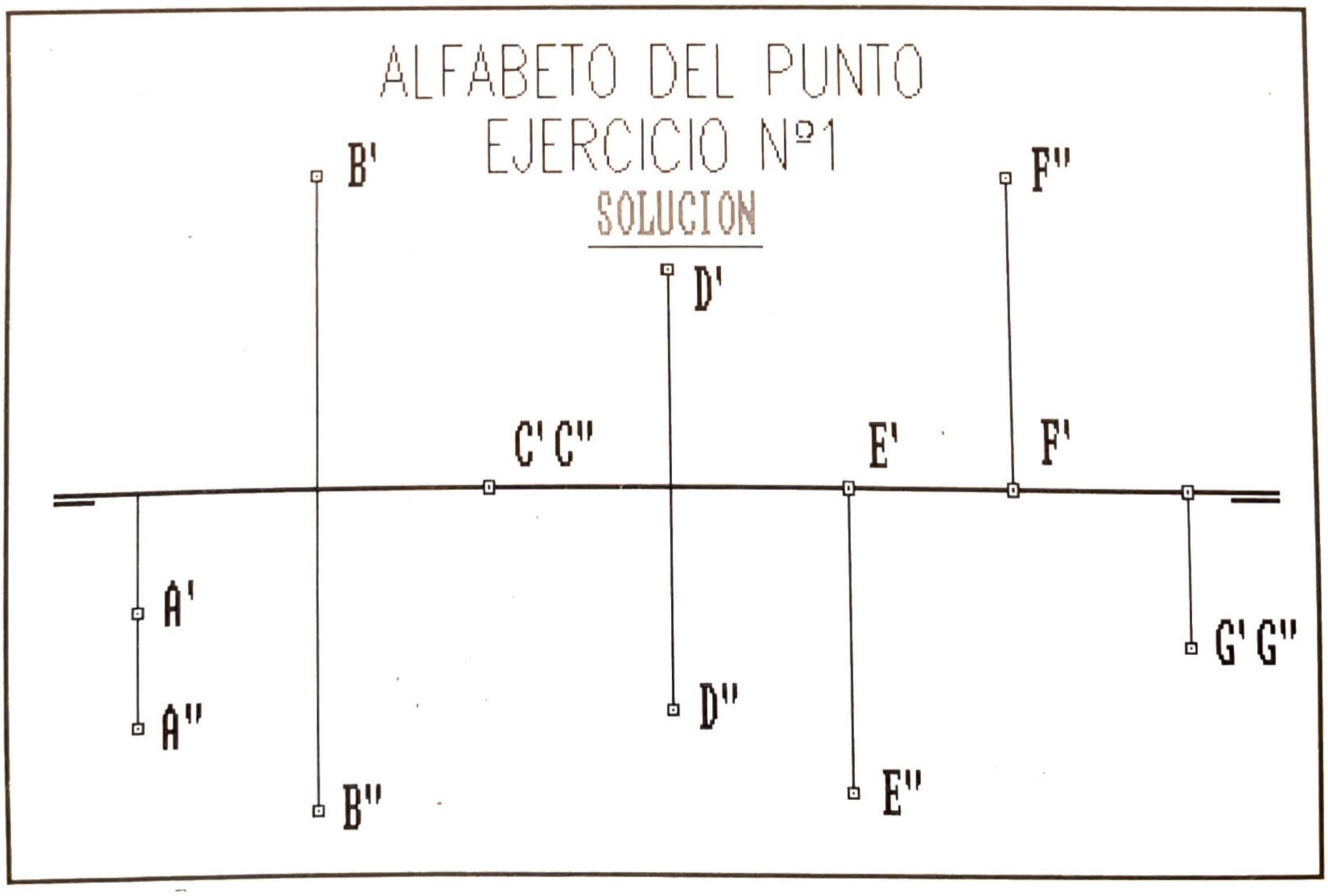
ALFABETO DEL PUNTO
EJERCICIO Nº1

Representar las proyecciones de los siguientes puntos.

A (– 29, 15) B (–40, – 40) C (Pertenece a L.T)

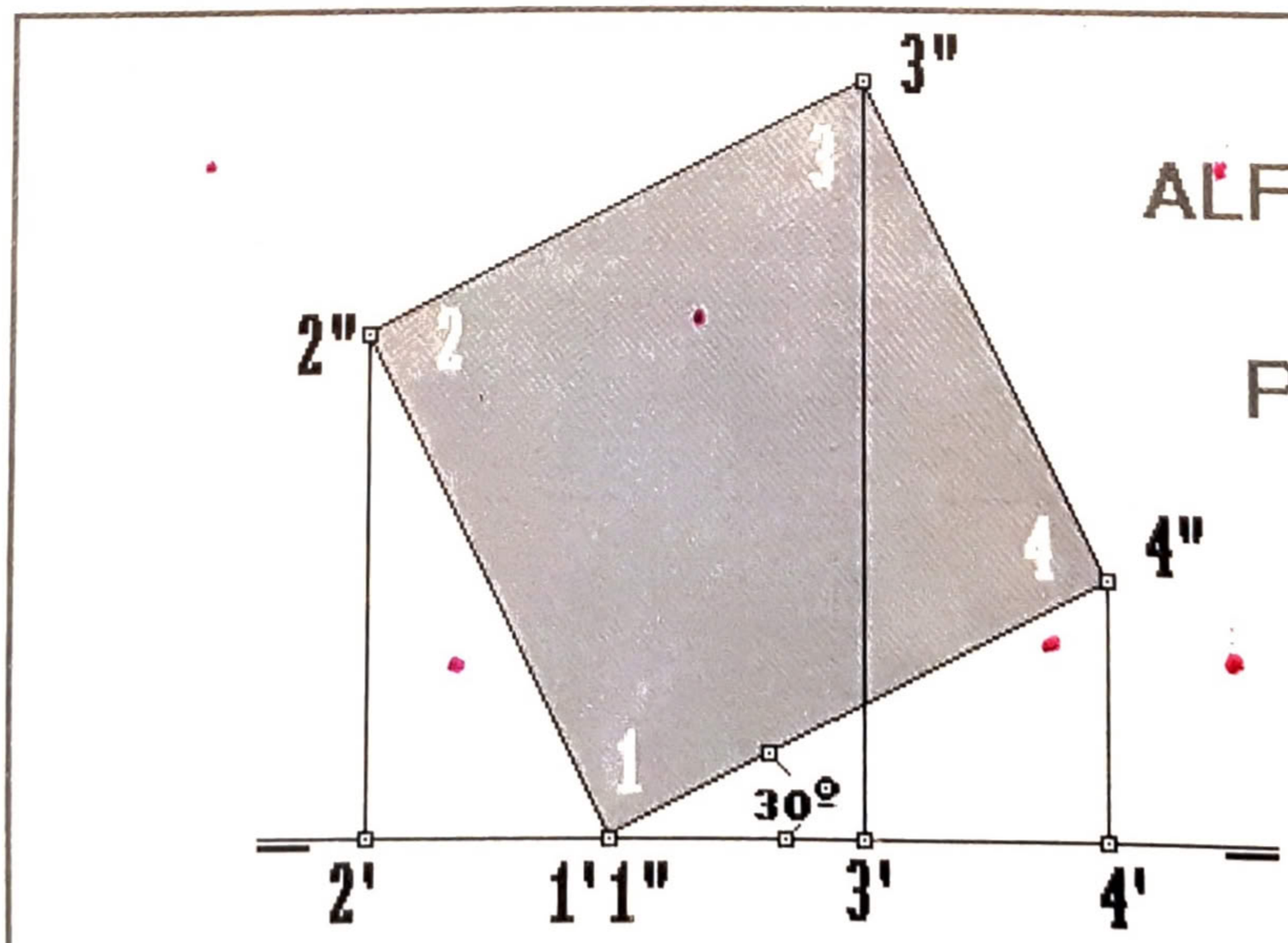
D (Pertenece al primer bisector siendo el valor de su cota (– 27 m/m.).

E (–38, 0) F (39, 0) G (Pertenece al segundo bisector y tiene –29 m/m. de alejamiento.



ALFABETO DEL PUNTO
EJERCICIO Nº 2

Representar las proyecciones horizontal y vertical de los vértices de un cuadrado , sabiendo que está situado en el plano vertical superior , que uno de sus vertices pertenece a la L.T. y que uno de sus lados forma 30° con el plano horizontal.
NOTA: La diagonal del cuadrado mide 75 m/m.



ALFABETO DEL PUNTO

EJERCICIO Nº 2
SOLUCION

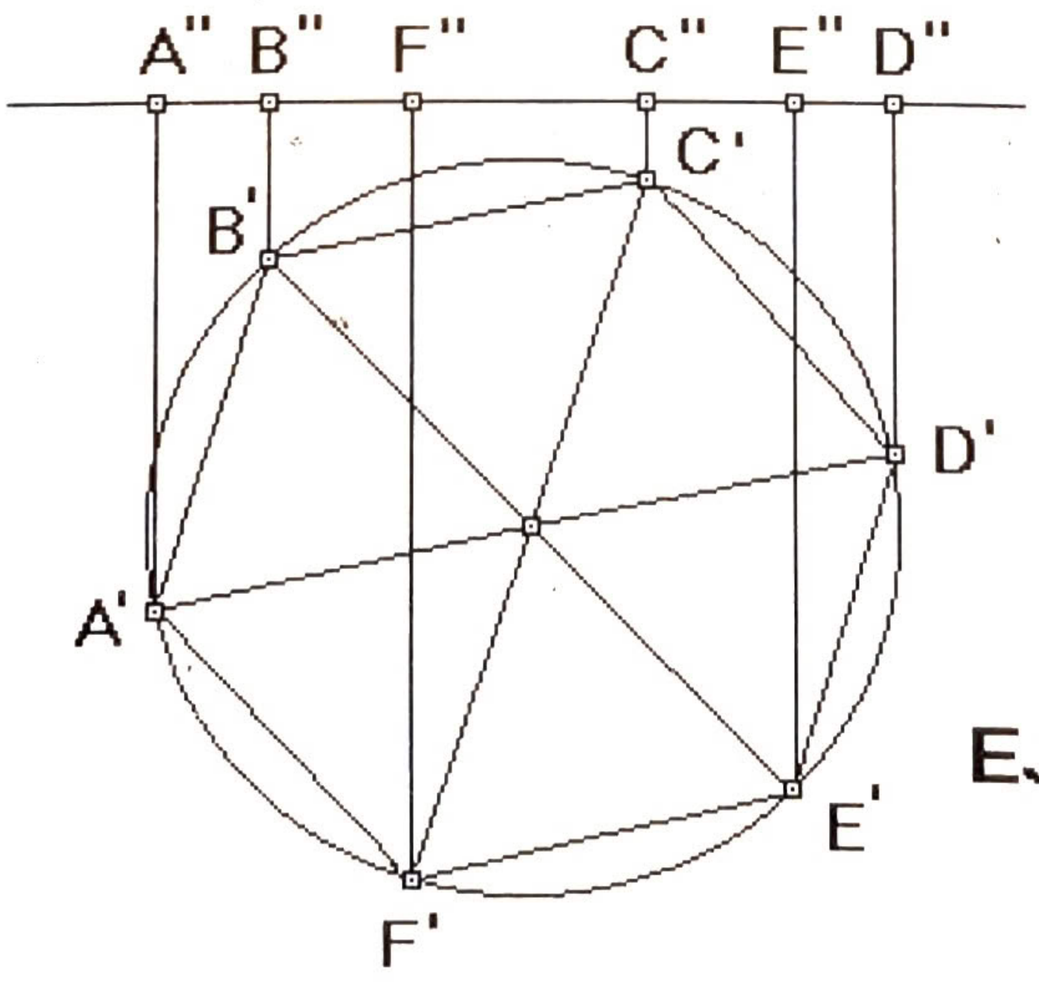
ALFABETO DEL PUNTO
EJERCICIO Nº 3

Representar las proyecciones horizontal y vertical de un hexágono regular , a partir de los siguientes datos:

a) El hexágono está situado en el plano horizontal e inscrito en una circunferencia de 62 m/m. de diámetro.

b) El centro del hexágono tiene 34 m/m. de alejamiento y dos de sus lados opuestos forman 45° con el plano vertical.

ALFABETO DEL PUNTO



EJERCICIO Nº 3
SOLUCION

Alfabeto de la recta.

ALFABETO DE LA RECTA

Una recta queda definida por dos puntos del espacio, entre los que establece la distancia más corta.

La recta es, por tanto, la distancia más corta entre dos puntos cualesquiera. En el sistema diédrico, para que una recta pase por un punto, es necesario que sus proyecciones pasen por las homónimas del punto.

Una recta también puede ser definida por sus trazas (puntos de intersección de ésta con los planos de proyección).

El punto de intersección de una recta con el plano vertical, se denominará TRAZA VERTICAL y de la misma manera, el punto de intersección de una recta con el plano horizontal, se denominará TRAZA HORIZONTAL de dicha recta.

Este caso es igual al anterior ya que las trazas horizontal y vertical son también puntos del espacio.

Es posible que una recta tenga sólo una traza, esto se puede dar en el caso de que dicha recta sea paralela a cualquiera de los dos planos de proyección.

Las rectas en el espacio según su posición, respecto a planos de proyección, se representarán de distintas formas, que analizaremos a continuación.

En el estudio del *alfabeto de la recta* representaremos las proyecciones tanto horizontal como vertical de las rectas en las diferentes posiciones que puedan ocupar en el espacio.

RECTAS CONTENIDAS EN PLANOS DE PROYECCION

1º .- Recta contenida en el plano horizontal. (fig. nº1)

La recta t contenida en el plano horizontal, presenta su proyección horizontal t' oblicua respecto a L.T., mientras que su proyección vertical t" coincide con L.T.

Las distancias Q'Q" y P'P" son los alejamientos de la recta respecto al plano vertical en dichos puntos.

Si prolongamos la proyección horizontal Q'P', ésta cortará al plano vertical en un punto, que será la traza vertical de la recta t.

Esta recta t no tiene traza horizontal, ya que está contenida en el plano horizontal.

2º.- Recta contenida en el plano vertical. (fig. nº2)

Similar a lo anteriormente expuesto, con algunas diferencias.

Las distancias Q'Q" y P'P" son las cotas o distancias de la recta t al plano horizontal, en dichos puntos.

Al prolongar la proyección vertical P"Q", ésta cortará al plano horizontal en un punto que será la traza horizontal de la recta t.

Esta recta t no tiene traza vertical, por estar contenida en el plano vertical.

RECTAS PERPENDICULARES A LOS PLANOS DE PROYECCION.

1º.- Recta perpendicular al plano horizontal. (fig. nº 3)

En la fig. nº3 hemos representado la recta t perpendicular al plano horizontal y delante del vertical. Su proyección vertical es t" y en su proyección horizontal la recta se representa como un punto al ser la recta perpendicular al plano horizontal.

2º.- Recta perpendicular al plano vertical. (fig. nº 4)

Esta recta se proyecta sobre el plano horizontal según t', mientras que su proyección sobre el plano vertical es un punto, por ser la recta perpendicular a dicho plano vertical.

NOTAS: En el 1º caso, las rectas perpendiculares al plano horizontal, pueden estar situadas, delante, en él o detrás del plano vertical.

En el 2º caso, las rectas perpendiculares al plano vertical, pueden igualmente estar situadas, por encima, en él o debajo del plano horizontal.

RECTAS PARALELAS
A LOS PLANOS DE PROYECCION.

1º.- Rectas paralelas al plano horizontal. (fig. nº 5)

Pueden tener 3 posiciones, por encima, en él o debajo del plano horizontal.

En los 3 casos las proyecciones verticales serán paralelas a L.T. o están contenidas en ella, carecen de traza horizontal al no tener "en ningún caso" punto de intersección con el plano horizontal, por estar la recta contenida en este plano o en otro paralelo a él.

Este tipo de rectas las denominamos "horizontales de plano".

2º.- Rectas paralelas al plano vertical. (fig. nº 6)

Pueden tener 3 posiciones, delante, en él o detrás del plano vertical.

En los 3 casos las proyecciones horizontales serán paralelas a L.T. o están contenidas en ella, carecen de traza vertical al no tener "en ningún caso" punto de intersección con el plano vertical, por estar la recta contenida, en este plano o en otro paralelo a él.

3º.- Rectas paralelas a L.T. (fig. nº 7)

Tiene tantas posiciones como hemos estudiado en el alfabeto del punto, es decir, 17 posiciones.

Sus proyecciones serán paralelas a L.T. careciendo de trazas, ya que los puntos de intersección de la recta con los planos de proyección son puntos impropios, es decir, se encuentran en el infinito.

Para poder representar este tipo de rectas es necesario conocer cualquier punto de ella que nos indique su posición en el espacio.

En la fig. nº 7 la recta t está situada en el 1º cuadrante, bajo el 1º plano bisector, ya que su cota PP' es menor que su alejamiento PP".

Tomando otro punto de la recta t, tal como el Q llegaríamos a la misma conclusión.

RECTAS QUE PASAN POR LINEA DE TIERRA

FIG. 8

Están contenidas en un plano de perfil coincidiendo sus trazas con la L.T. (punto Q).

Sus proyecciones t' y t" serán perpendiculares a L.T.

Para conocer el ángulo que forma la recta con cualquiera de los planos de proyección, necesitaremos conocer un punto cualquiera de ella.

En el caso de la fig. 8 el punto P de la recta t nos determinará su inclinación, la relación PP' y PP" nos determina la tangente del ángulo que la recta t forma con el plano horizontal.

RECTAS QUE SE CRUZAN

FIG. 9

Dos rectas tales como t y s, representadas en la fig. 9 decimos que se cruzan, cuando el punto de intersección de sus proyecciones horizontal y vertical no está contenido en el mismo plano de perfil.

En el caso de la fig. 9, t" y s" se cortan en P", mientras que t' y s' se cortan en Q'.

Como se puede observar P" y Q' no pertenecen al mismo plano de perfil. (En nuestro caso α).

RECTAS QUE SE CORTAN

FIG. 10

Si dos rectas se cortan el punto de intersección entre ellas, necesariamente, será común a ambas rectas, y por tanto las proyecciones de dicho punto deberán estar en el mismo plano de perfil.

En la fig. 10 las rectas s y t se cortan, ya que P', intersección entre s' y t' pertenece al mismo plano de perfil que P", intersección entre s" y t".

RECTAS PARALELAS AL PRIMER PLANO BISECTOR.

FIGs. 11 a 14

Pueden tener 3 posiciones, sobre el primer bisector, contenido en él o debajo de él.

En la fig. 11 hemos representado la recta t, que está contenida en el 1º plano bisector, dicha recta pasa por L.T. y por cualquier punto tales como P o Q, con la condición de que éstos pertenezcan al 1º plano bisector, es decir, que los valores absolutos de sus cotas y alejamientos sean iguales.

En la fig. 12 la recta t pasa por los cuadrantes 1º y 3º.

El punto P pertenece a la recta t en la zona del 1º cuadrante y el punto S en la zona del 3º cuadrante.

En la recta t no podemos encontrar puntos de los cuadrantes 2º o 4º, ya que la recta t no pasa por ellos.

Cuando la recta es paralela al 1º bisector, fig. 13, sus proyecciones forman el mismo ángulo con L.T.

V'V" es igual a H'H" siendo $B'_2B"_2$ un punto común de las proyecciones t' y t" que indica la intersección de dicha recta con el 2º plano bisector. (2º cuadrante)

La recta t atraviesa los cuadrantes 1º, 2º y 3º.

En el caso de la fig. 14 la recta es paralela al 1º bisector, pero por debajo de éste, atraviesa los cuadrantes 1º, 4º y 3º, su intersección con el 2º bisector es el punto $B'_2B"_2$, del 4º cuadrante.

RECTAS PARALELAS AL 2º PLANO BISECTOR.

Al igual que las rectas paralelas al 1º plano bisector, tendrán 3 posiciones.

En las figs. 15 a 18 hemos representado los 3 casos, indicándose en cada uno de ellos los cuadrantes que atraviesa.

En estos casos las proyecciones de las rectas son paralelas, careciendo de intersección con el 2º bisector.

En la fig. 17 podemos observar que el punto $B'_1B"_1$ pertenece al 1º bisector en la zona del 1º cuadrante, ya que su cota y su alejamiento tienen el mismo valor.

RECTAS DE PERFIL.

Pueden ser o no perpendiculares a los bisectores. En las figs. 19 y 20 hemos representado los posibles casos de rectas perpendiculares a los planos bisectores, sobre ellos, en ellos, o bajo ellos.

RECTAS OBLICUAS RESPECTO A LOS PLANOS DE PROYECCION (GENERICAS)

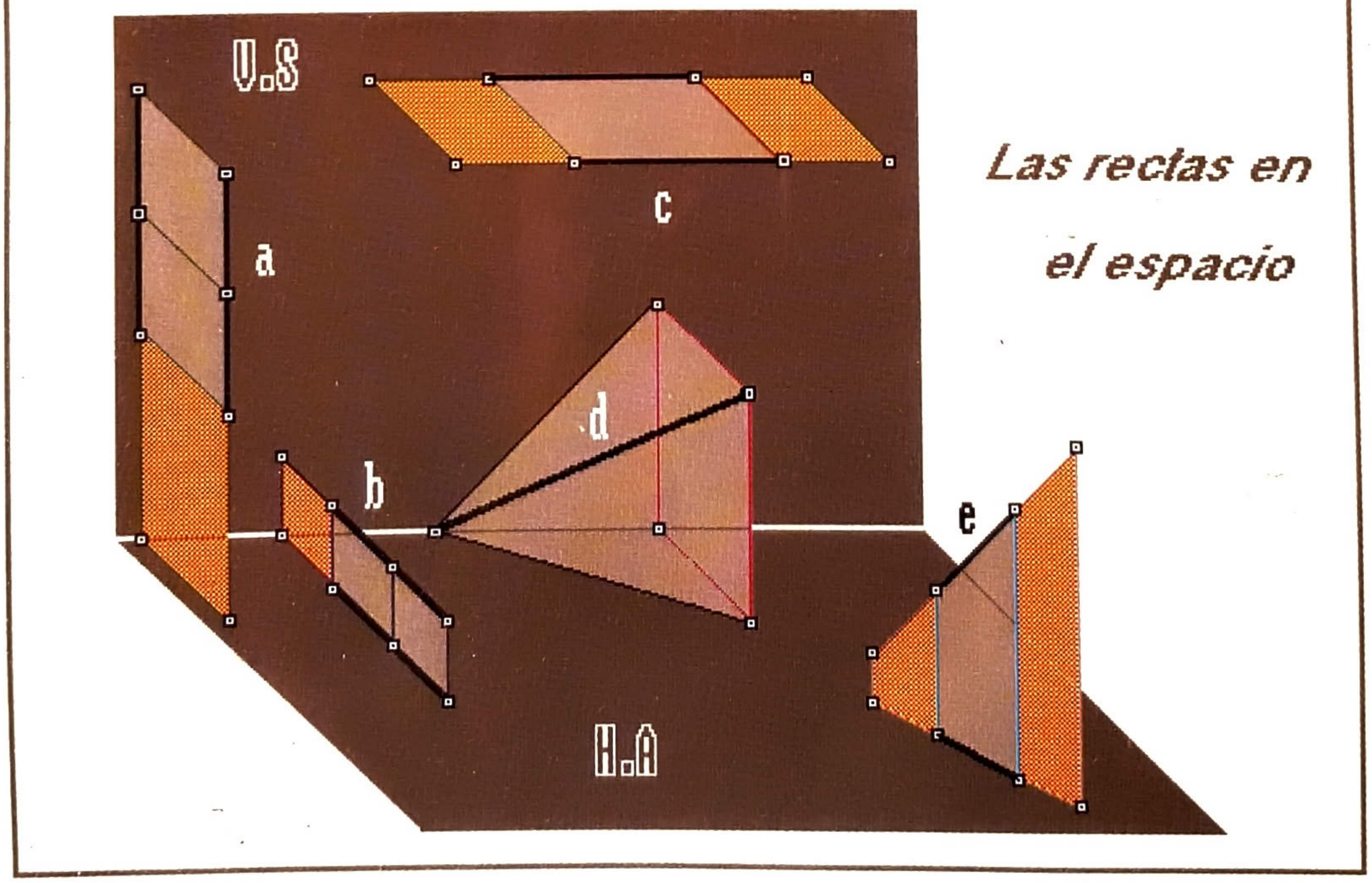
FIG. 21 Y 22

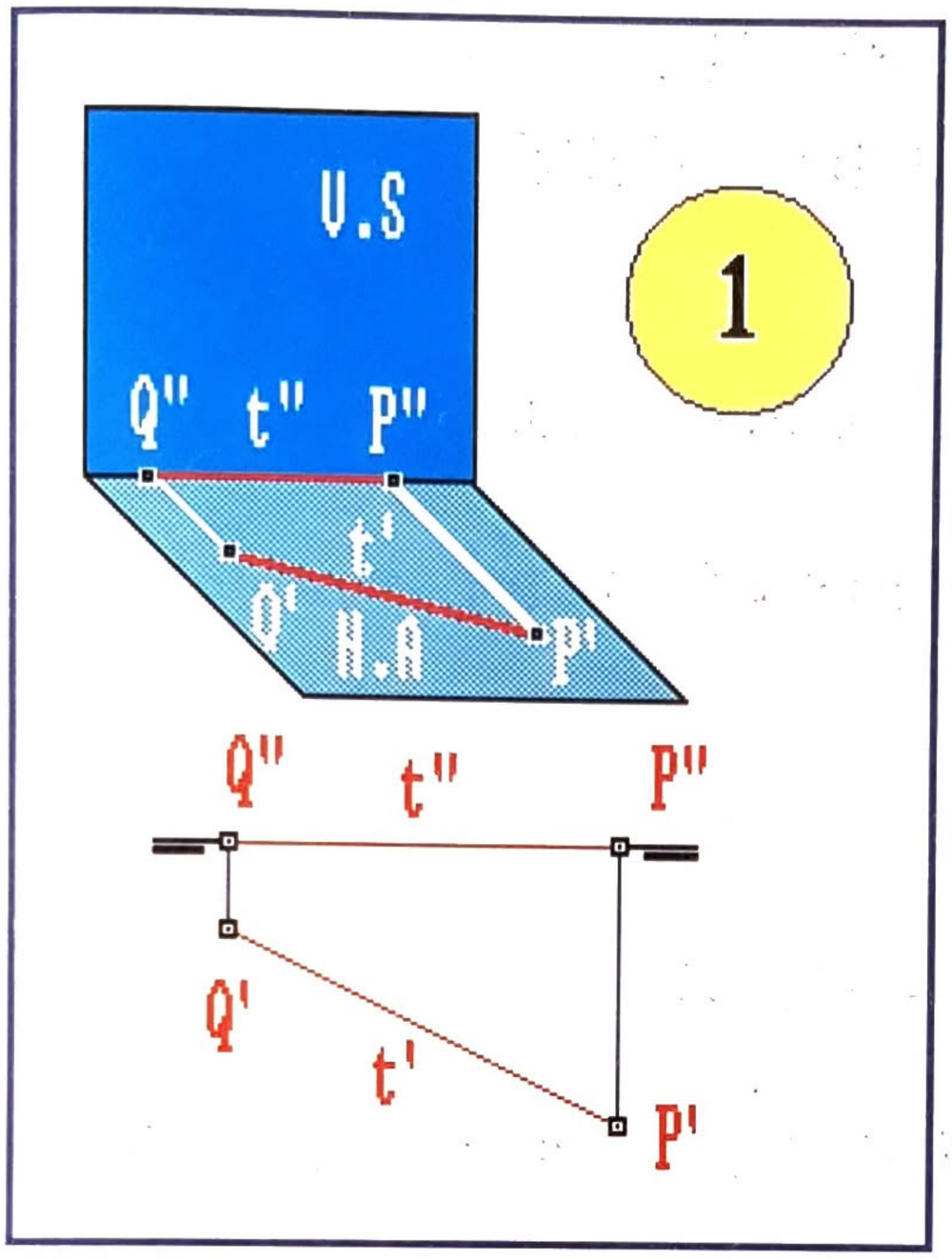
Este tipo de rectas pasa por dos puntos del espacio, tales como el P y el Q, cuyas cotas y alejamientos son distintos.

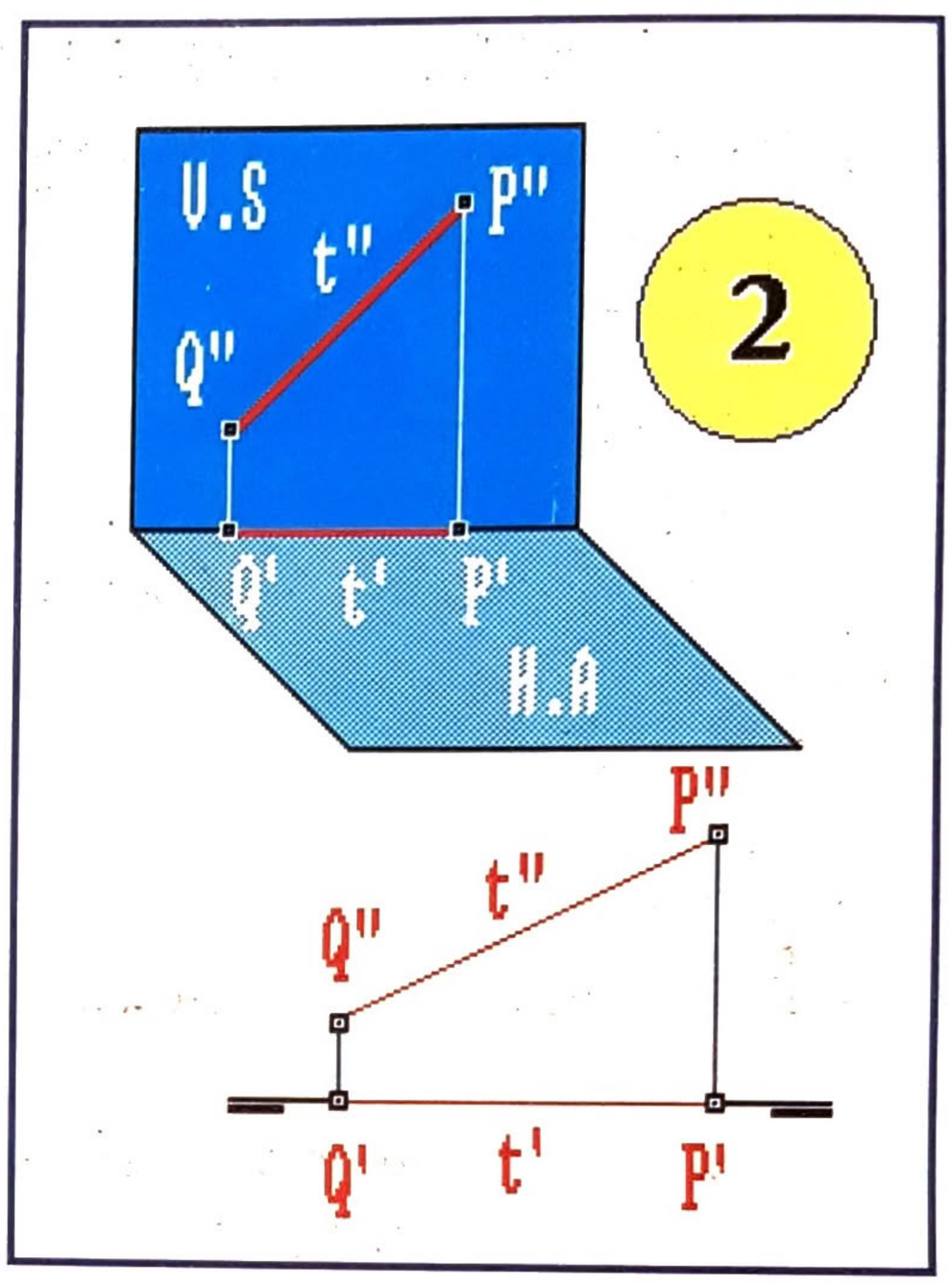
Estas rectas según la posición de los puntos P y Q, pueden atravesar los cuadrantes:

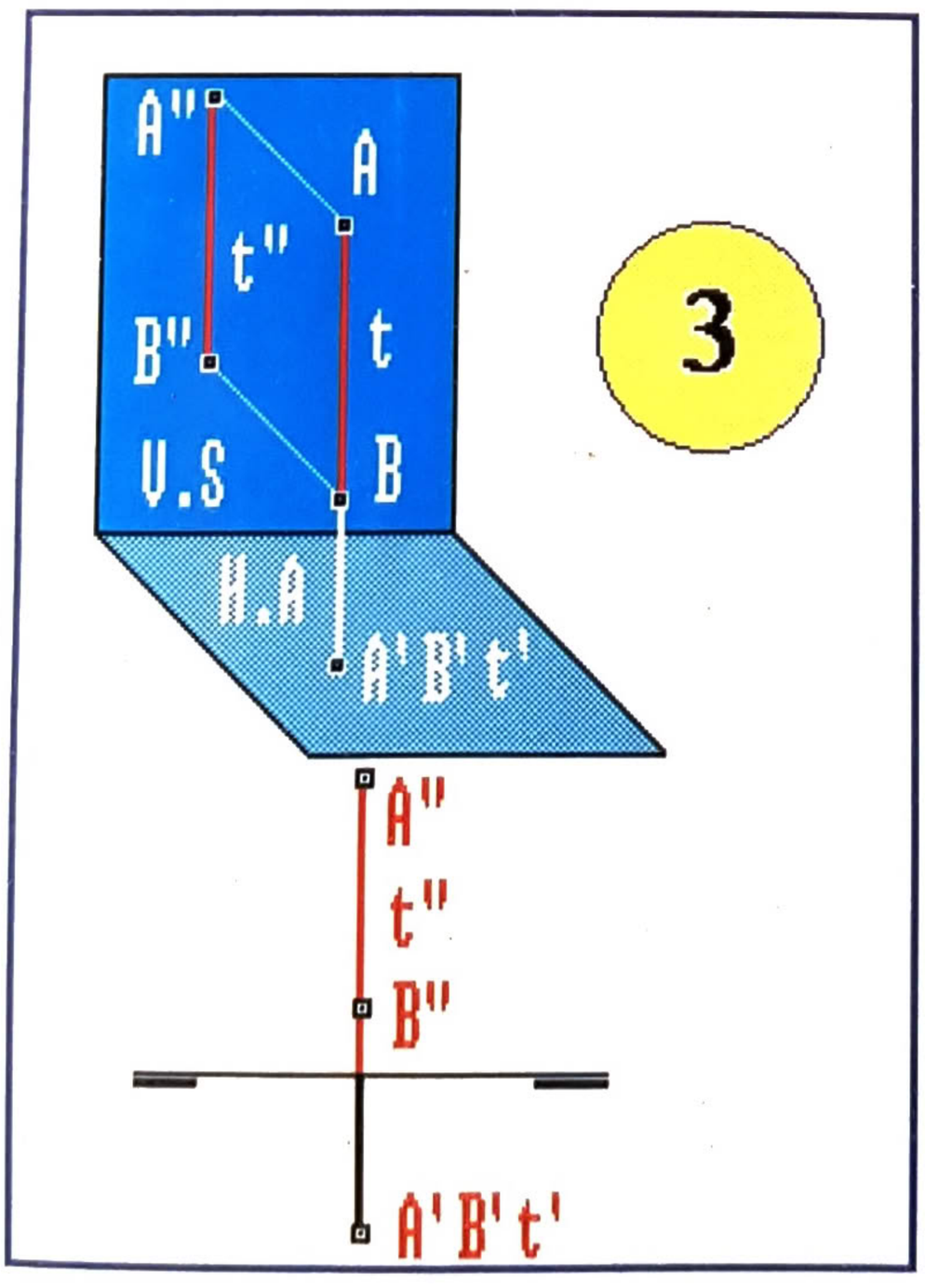
- 1º, 2º y 3º.
- 1º, 3º y 4º.
- 2º, 3º y 4º.
- 4º, 1º y 2º; caso éste representado en la fig. 22.

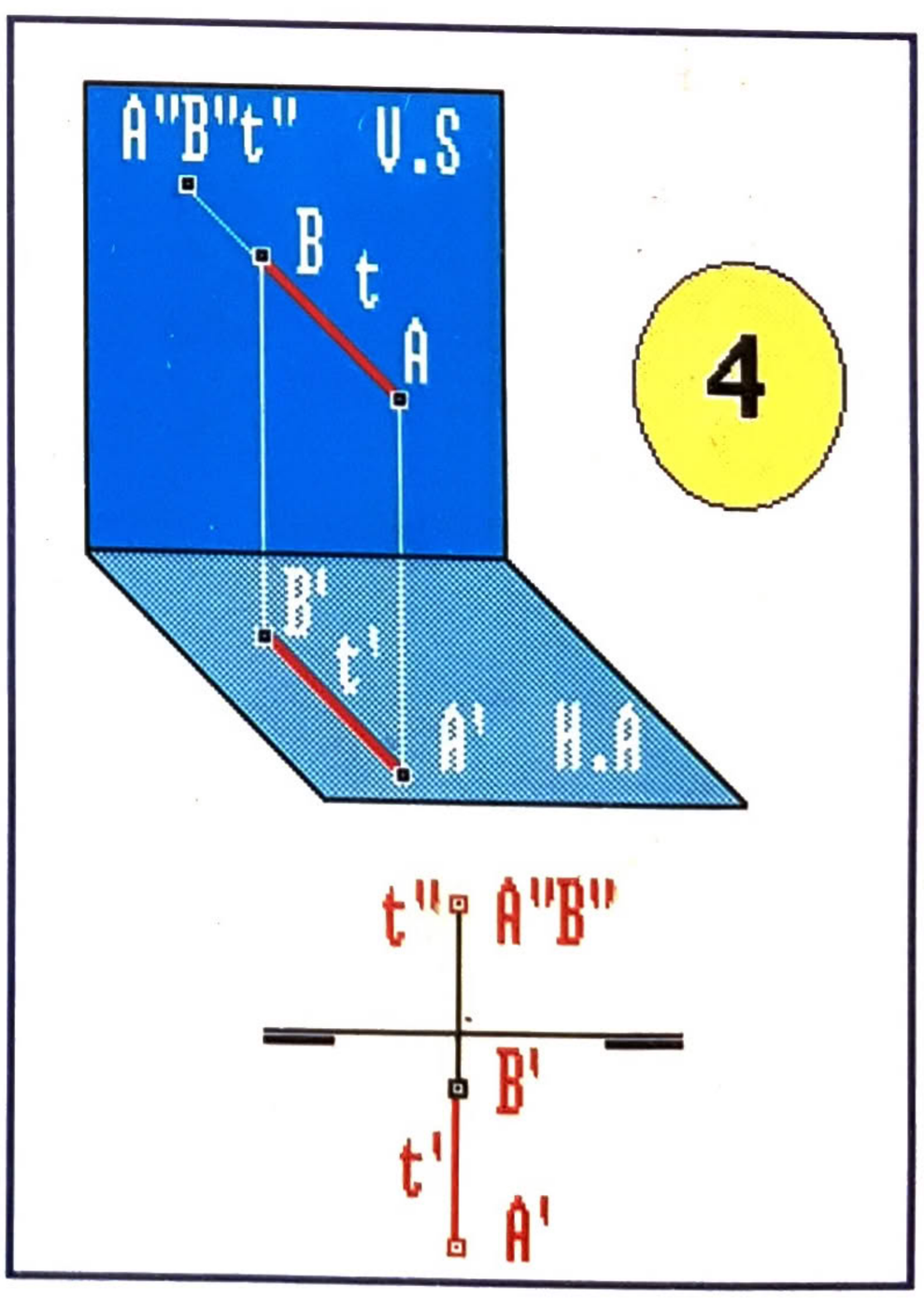
La zona comprendida en el 1º cuadrante es VISTA, mientras que la de los cuadrantes 2º y 4º es OCULTA.

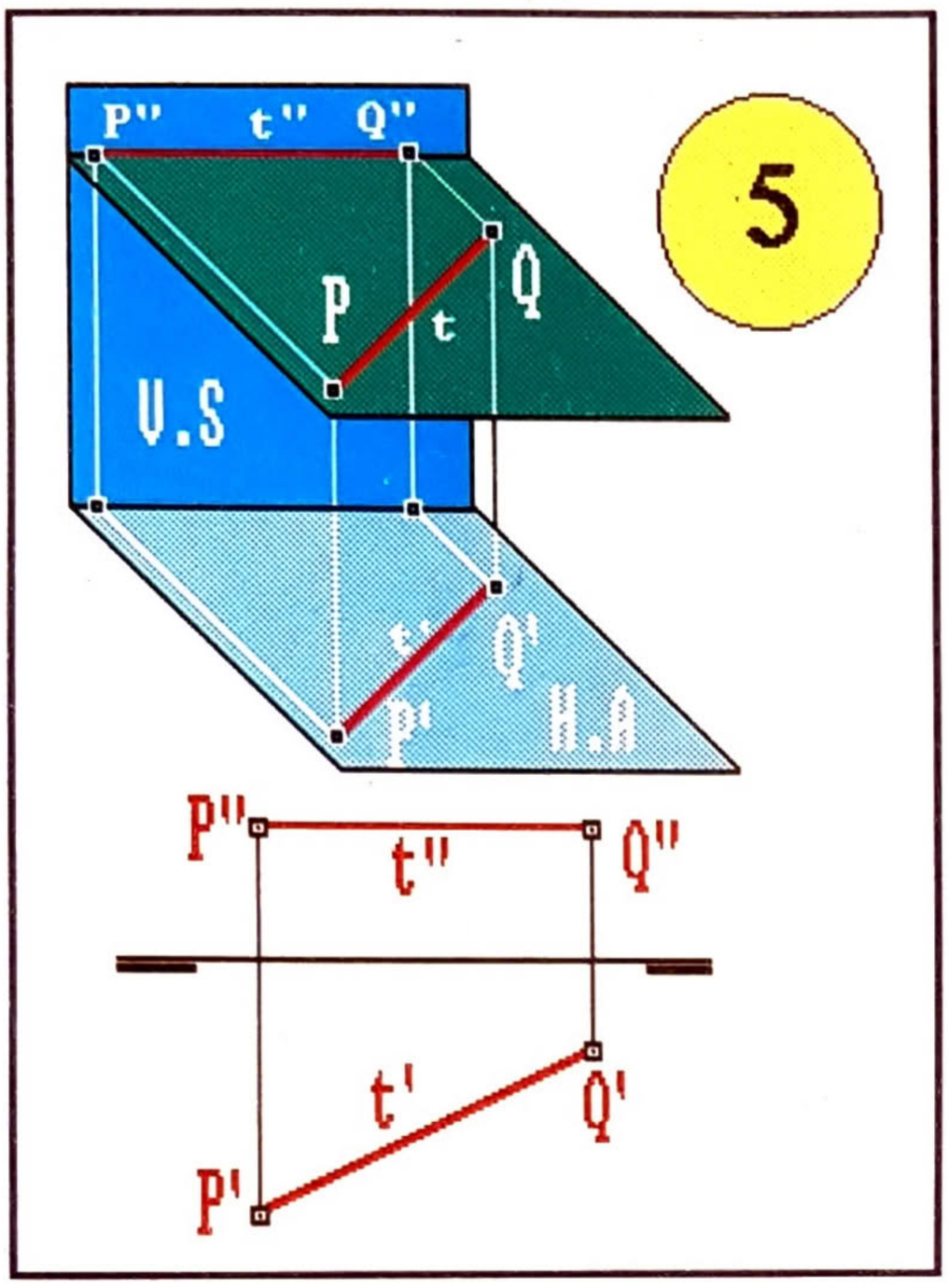


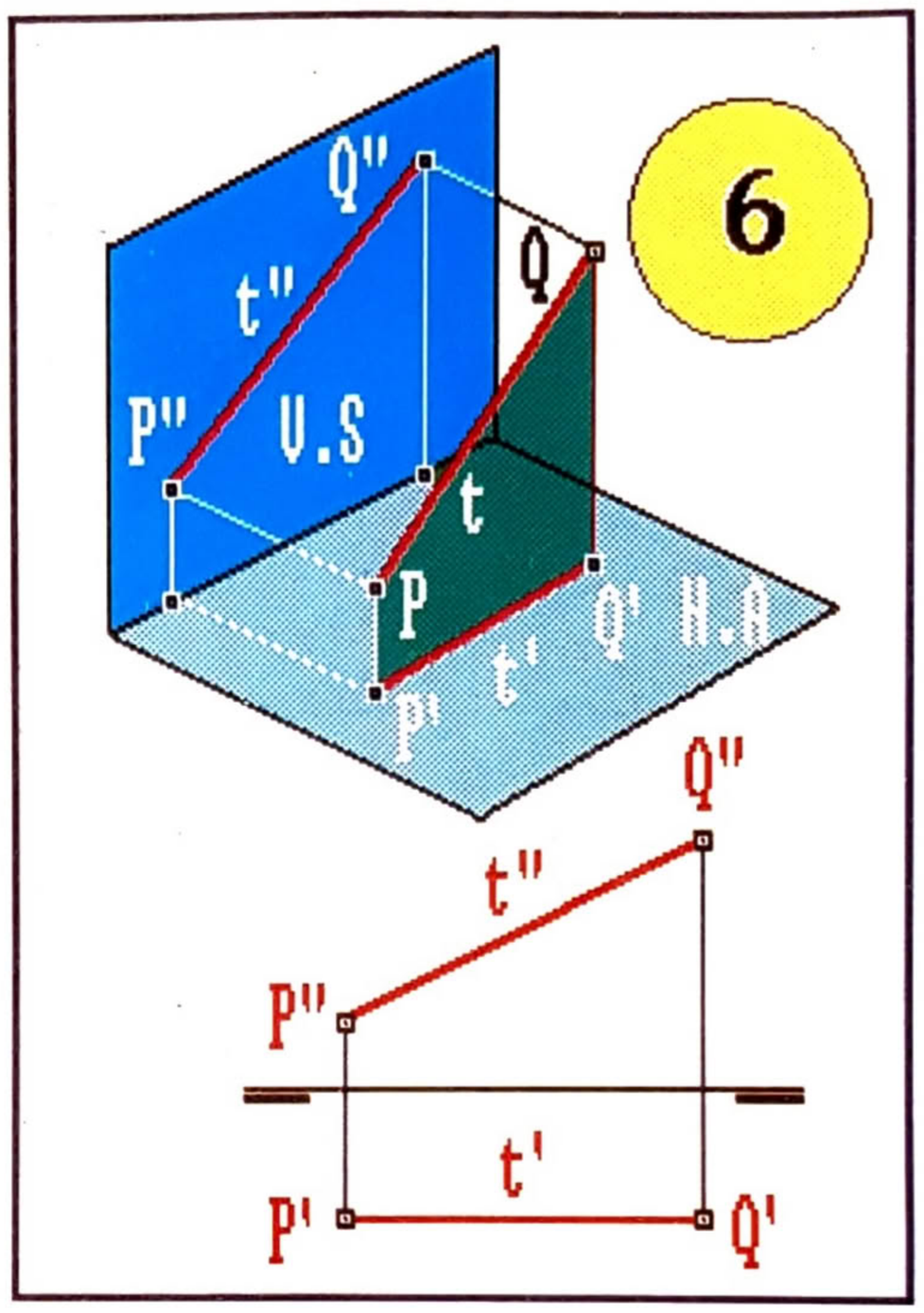

V.S
Q" t" P"
t'
Q' H.A P'
1
Q" t" P"
Q' t' P'

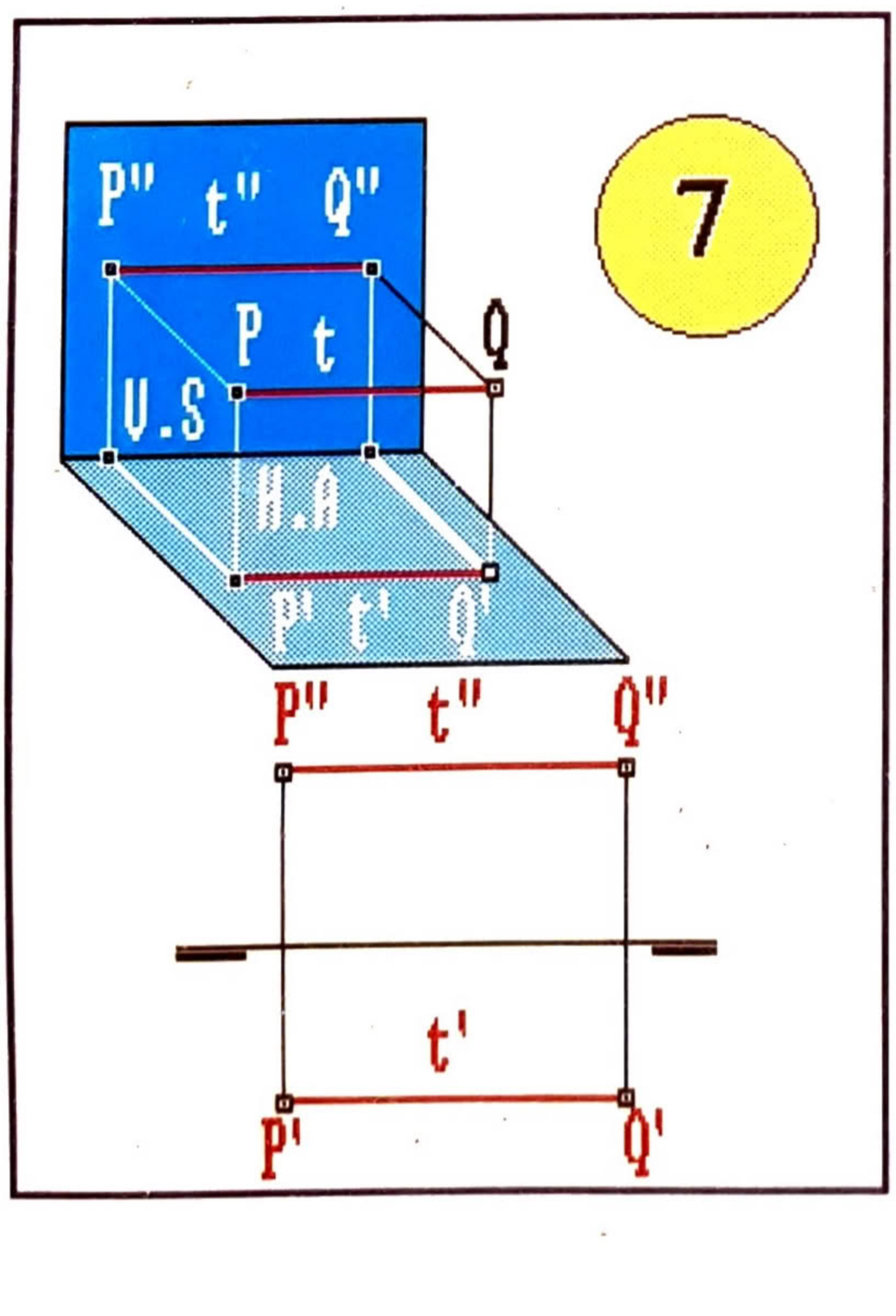

V.S
t"
P"
Q"
Q' t' P'
H.A
2
P"
t"
Q"
Q' t' P'

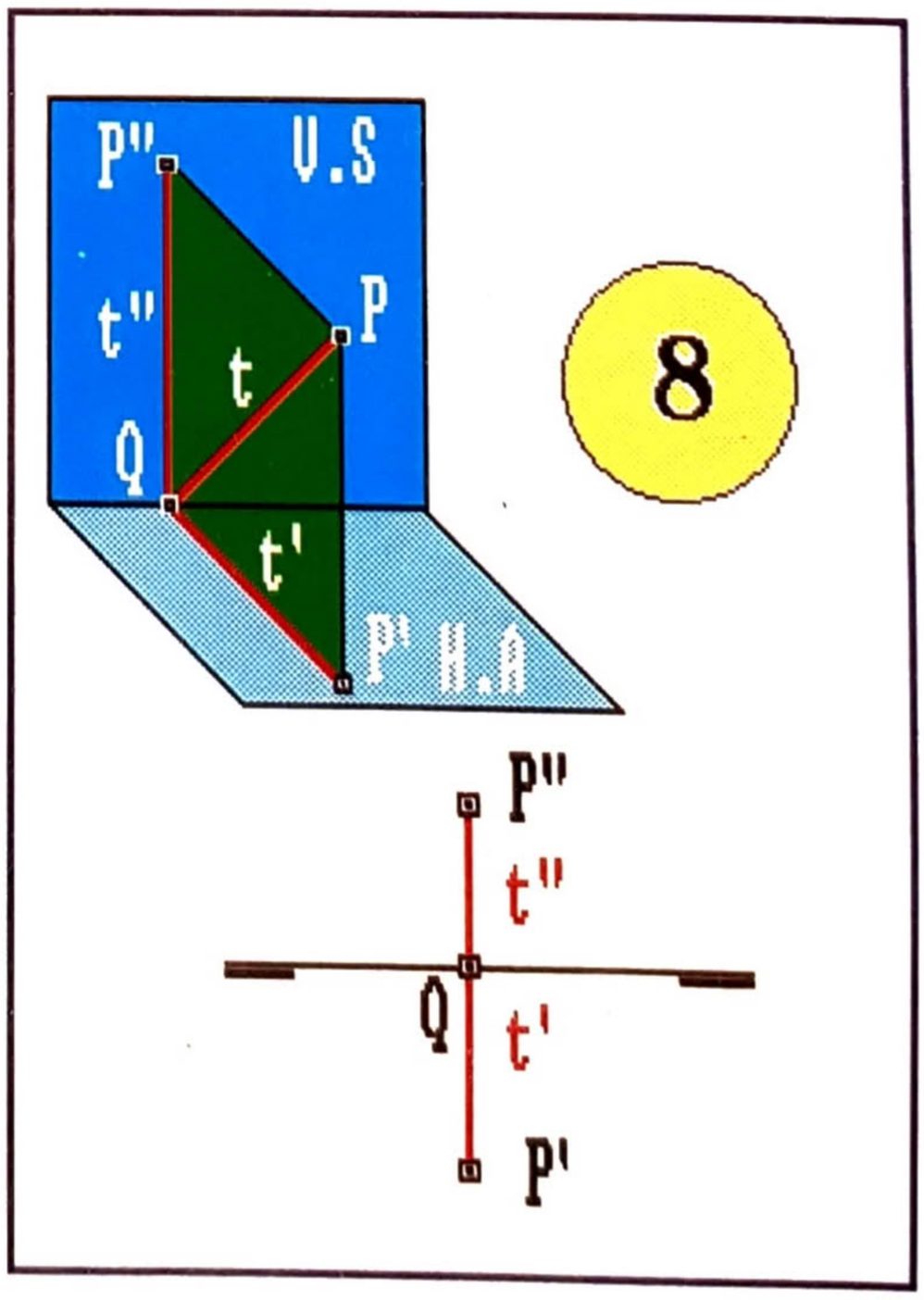

A"
A
t"
B"
t
V.S
B
H.A
A'B't'
3
A"
t"
B"
A'B't'

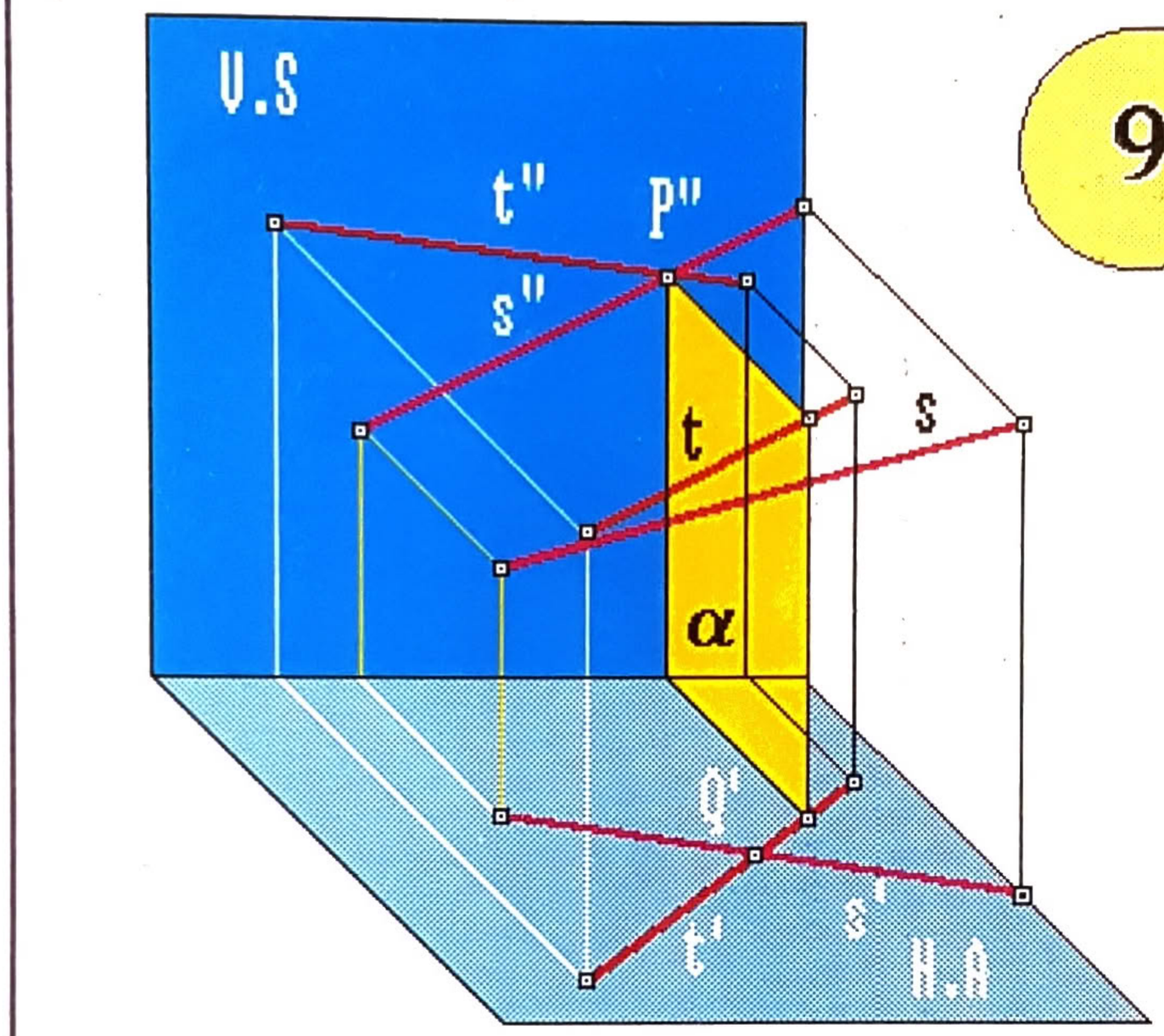

A"B"t"
V.S
B
t
A
B' t' A' H.A
4
t" A"B"
B'
t' A'


5
P" t" Q"
P
t
Q
V.S
t'
Q'
P'
H.A
P"
t"
Q"
t'
Q'
P'

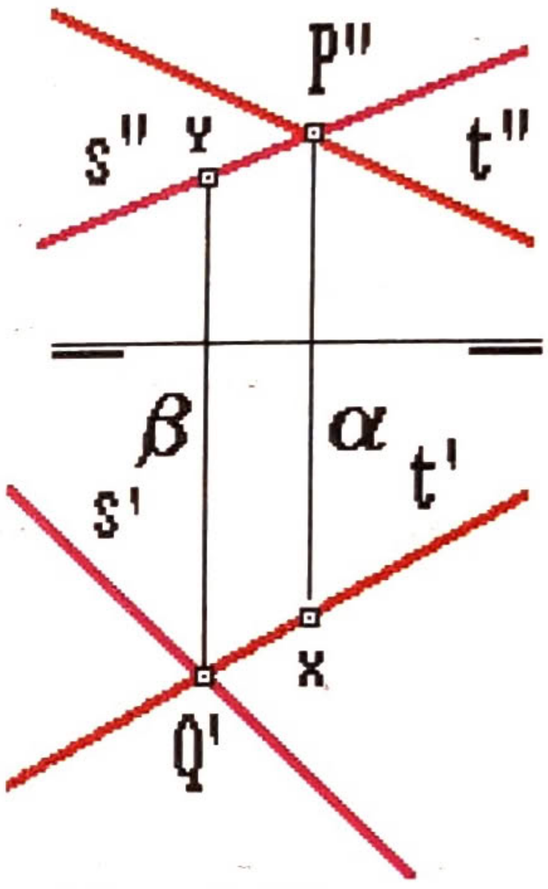

6
Q"
t"
Q
P"
V.S
t
P
Q' H.A
P' t'
Q"
t"
P"
t'
P'
Q'

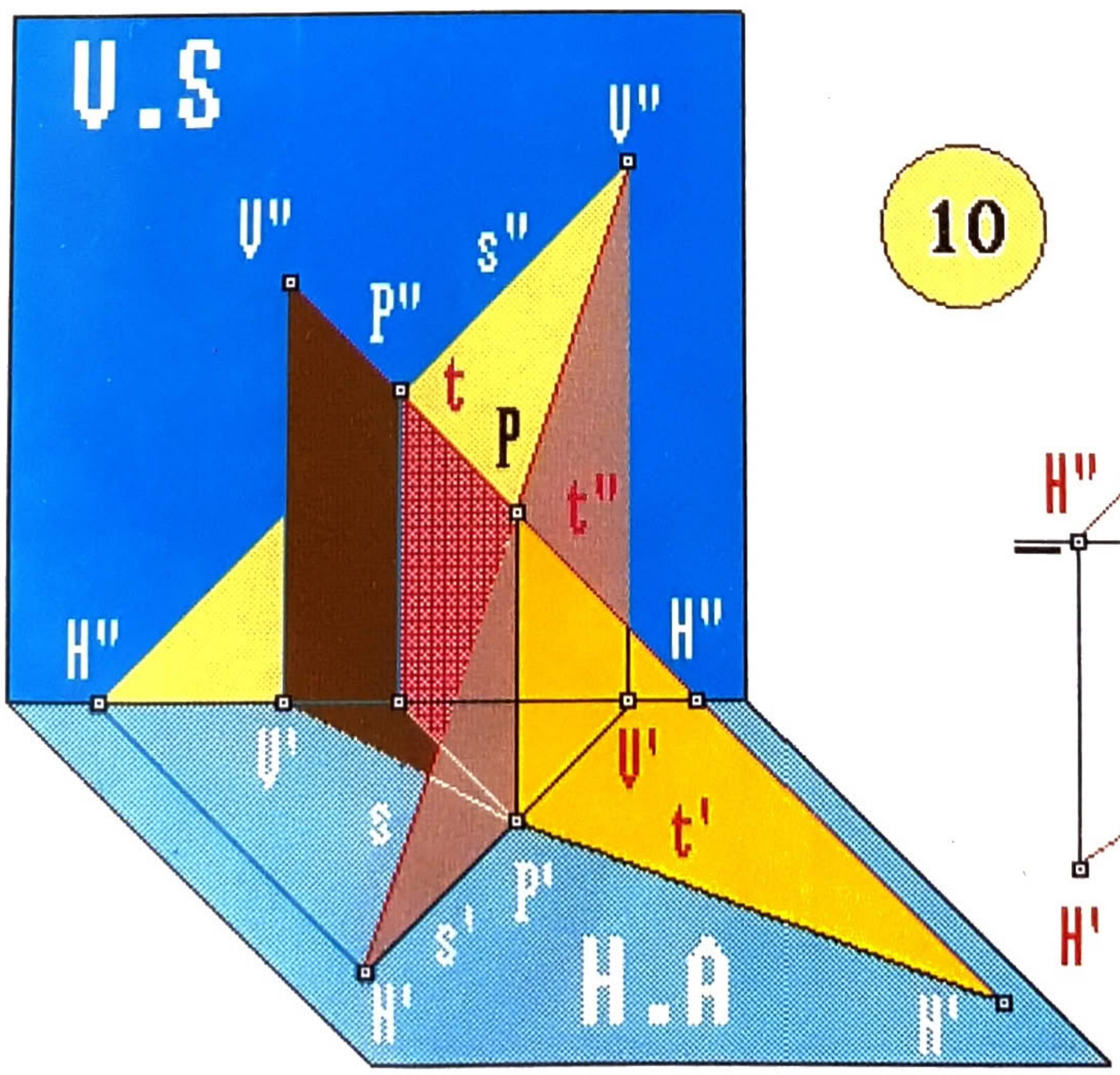

7
P" t" Q"
P t
Q
V.S
H.A
P' t' Q'
P"
t"
Q"
t'
P'
Q'


8
P"
V.S
t"
P
t
Q
t'
P' H.A
P"
t"
Q
t'
P'

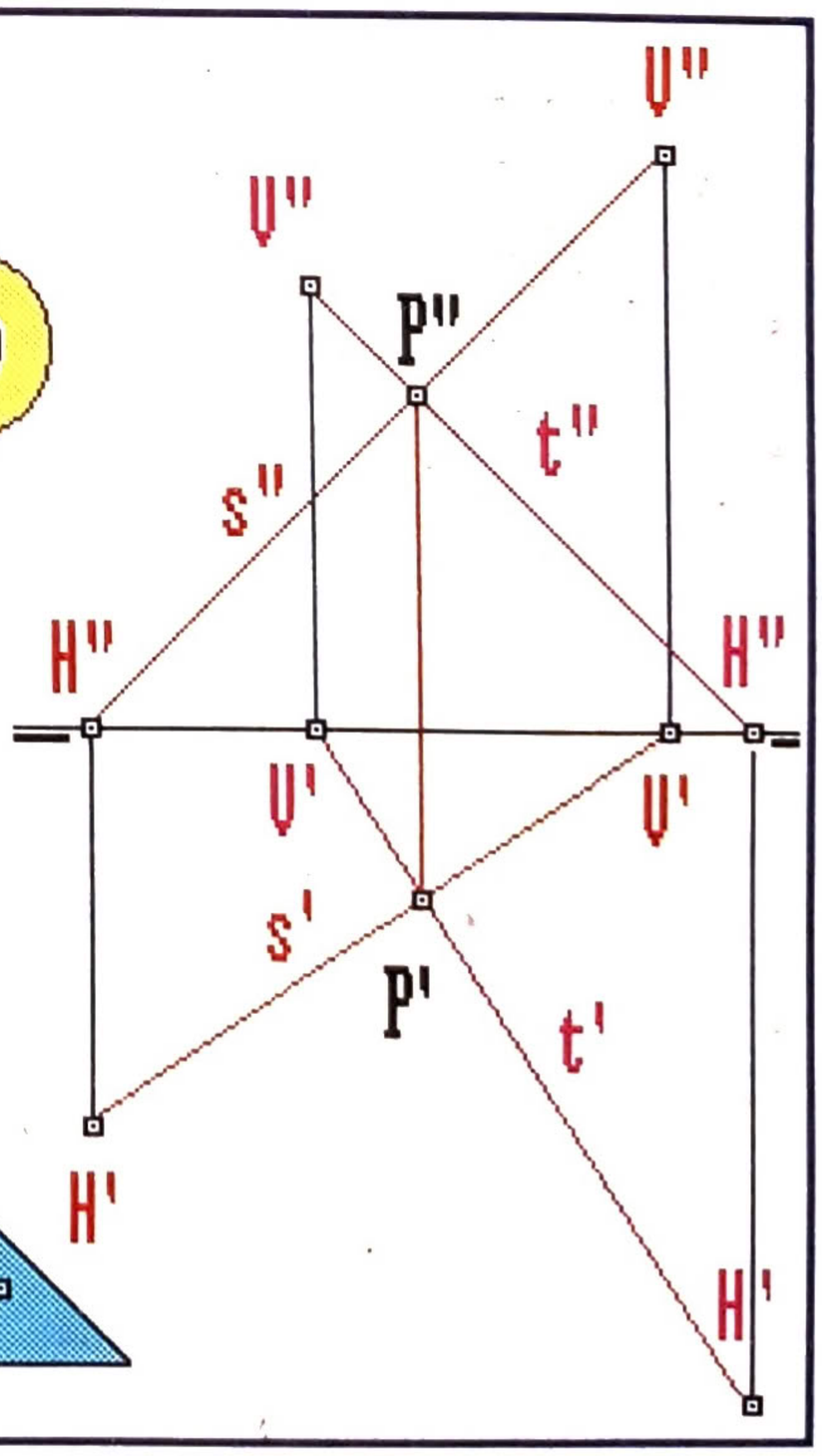

V.S
t"
P"
s"
t
s
α
Q'
t'
s'
H.Å

9

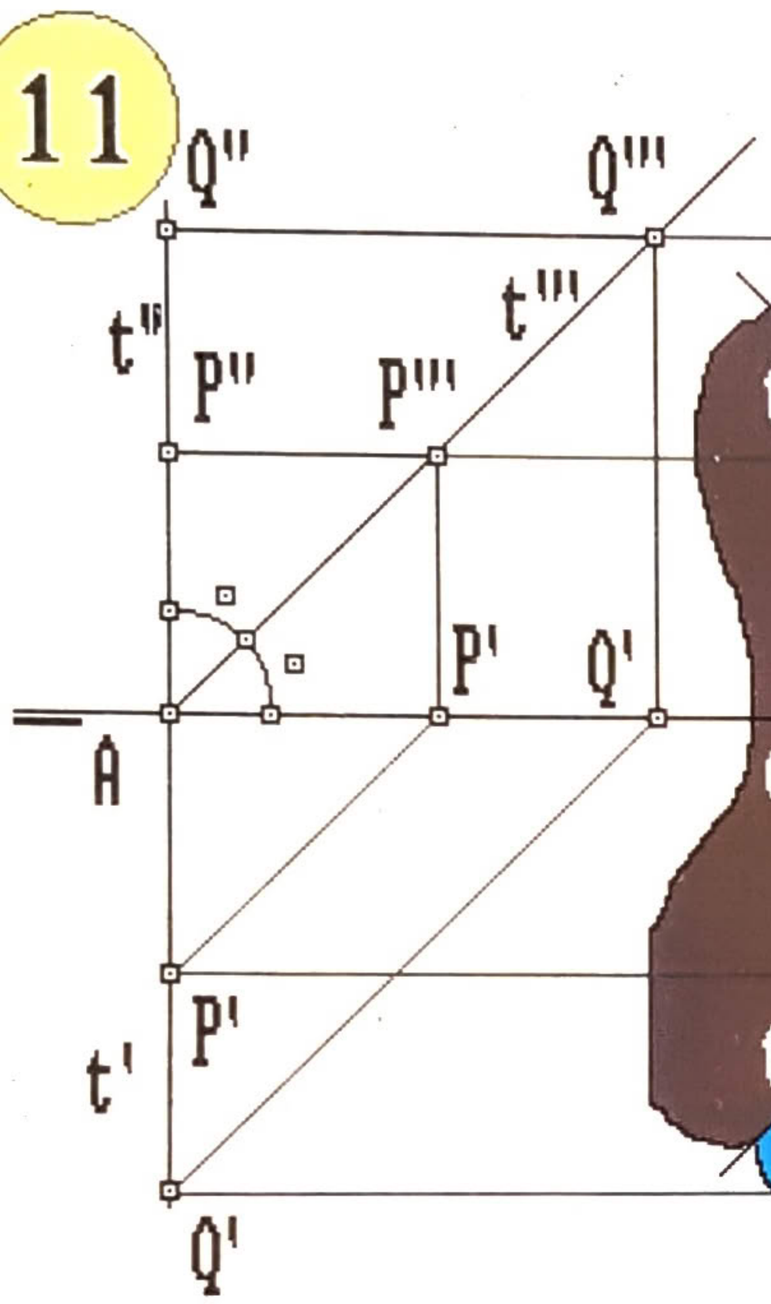

P"
s"
y
t"
β
α
s'
t'
x
Q'


V.S
V"
V"
P"
s"
t
P
t"
H"
H"
V'
V'
s
t'
P'
s'
H'
H.Å
H'

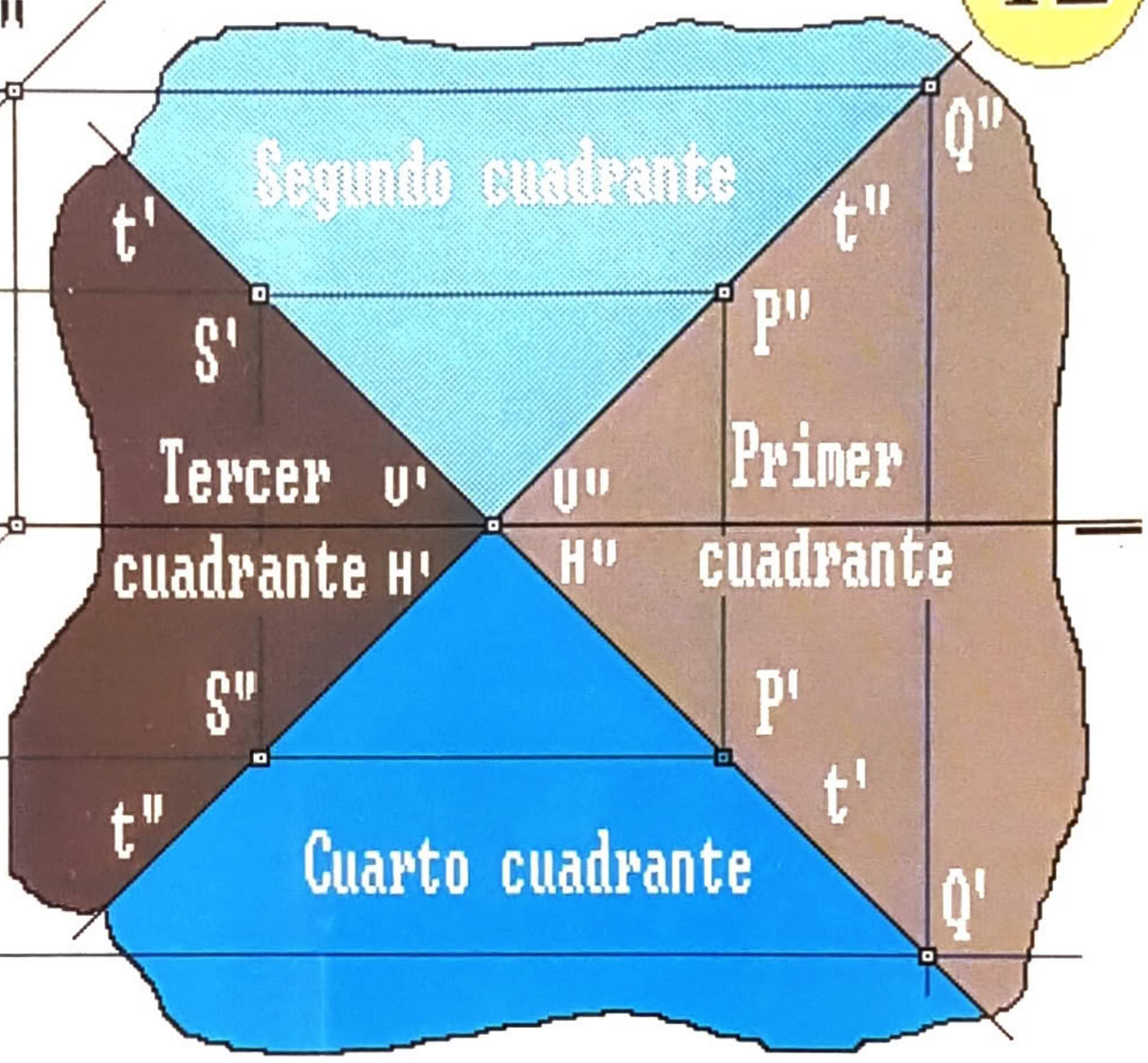
10


V"
V"
P"
t"
s"
H"
H"
V'
V'
s'
P'
t'
H'
H'

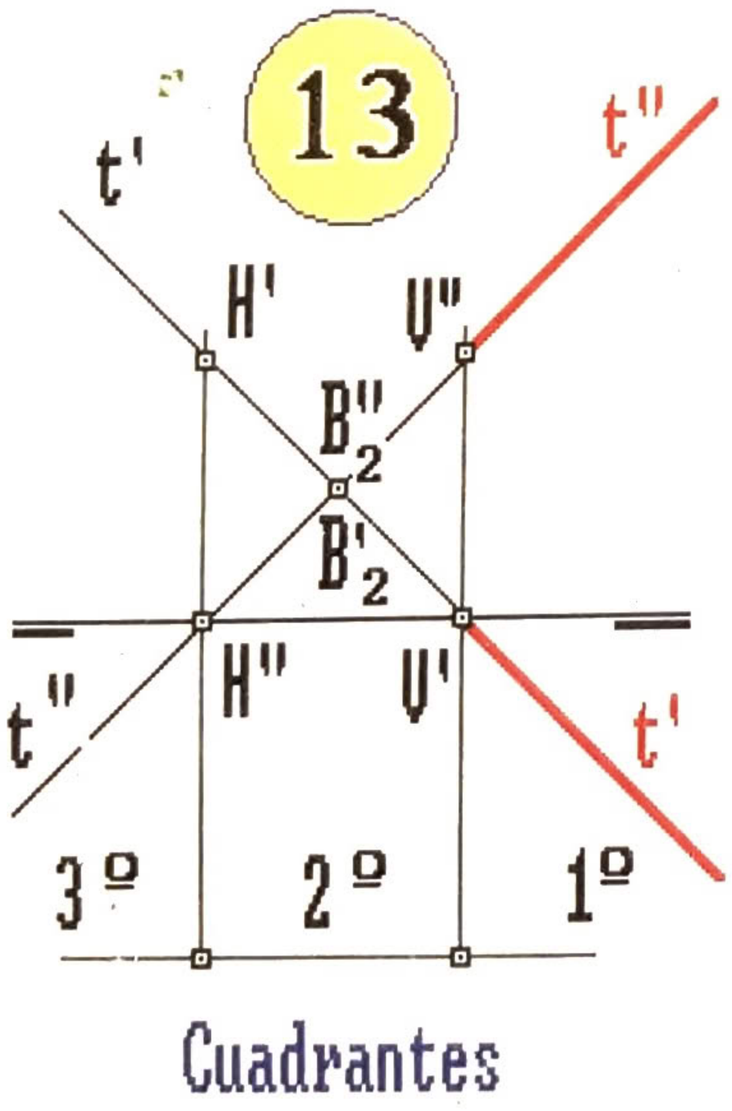
11



12

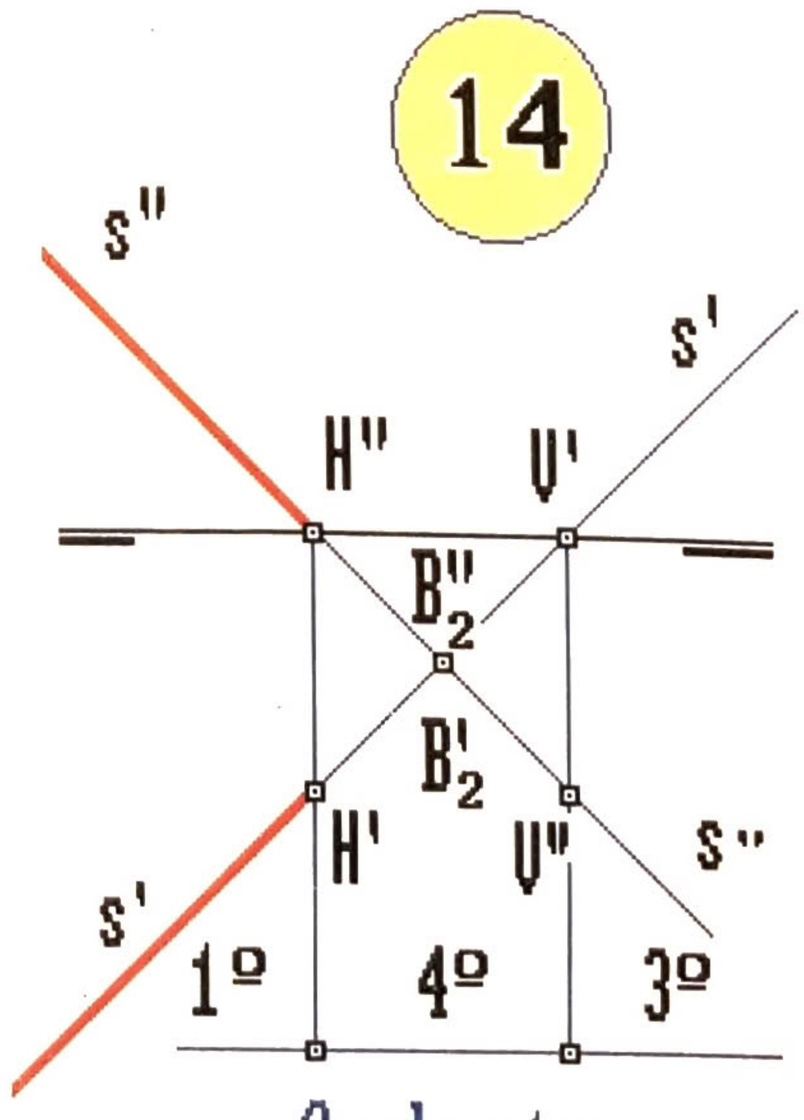


13

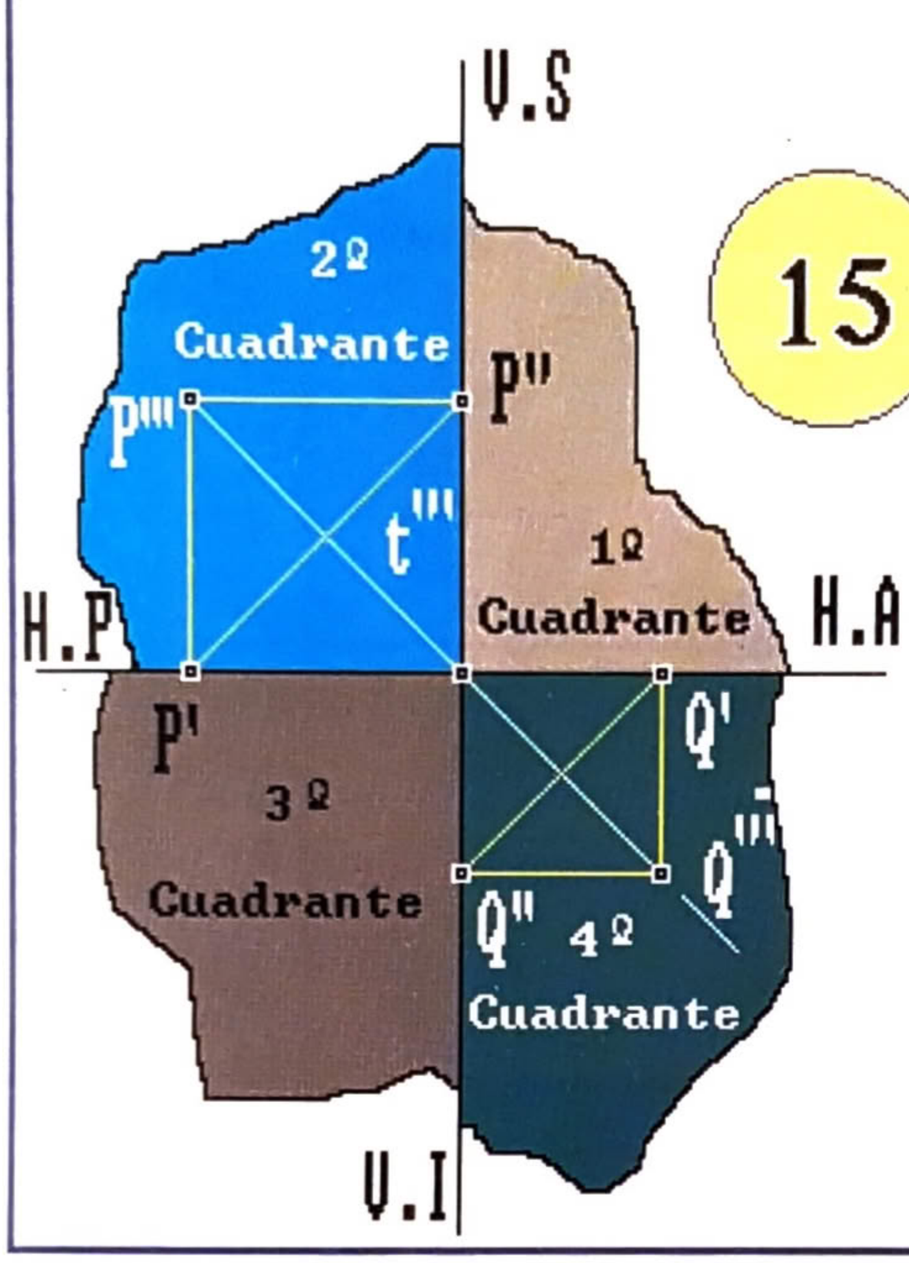


Cuadrantes

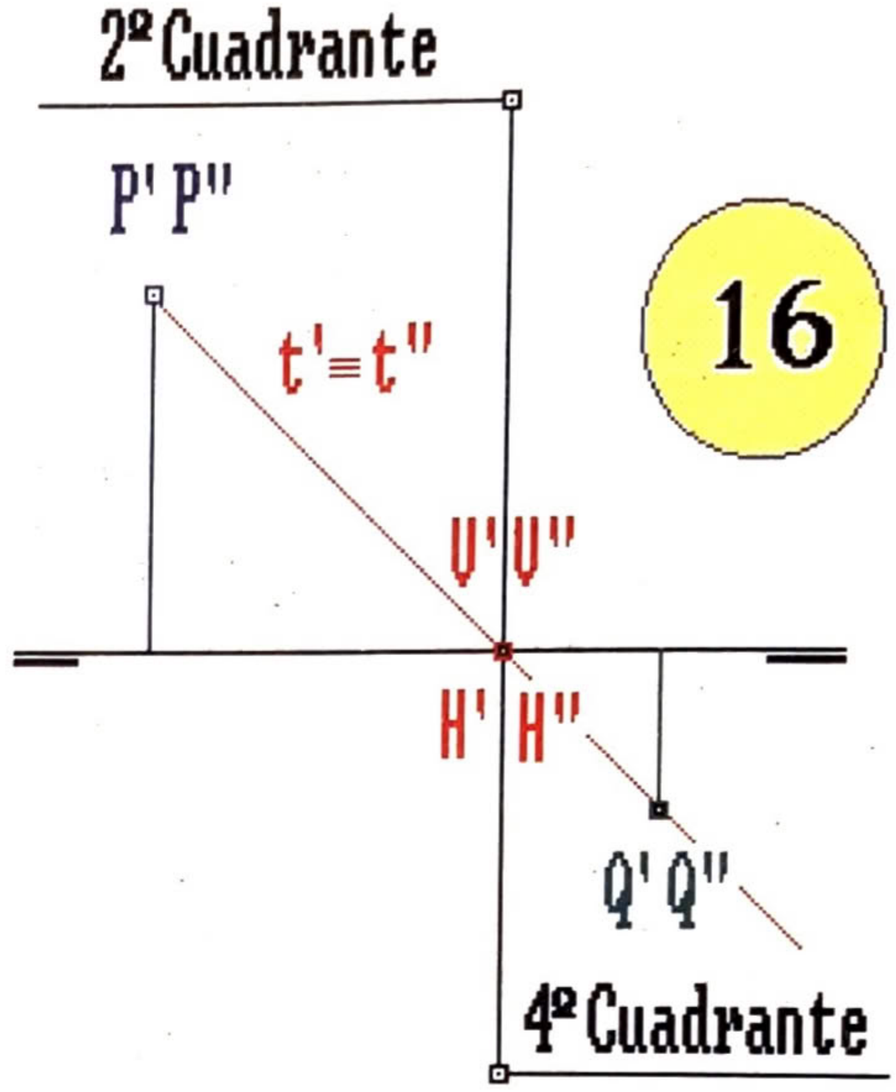
14



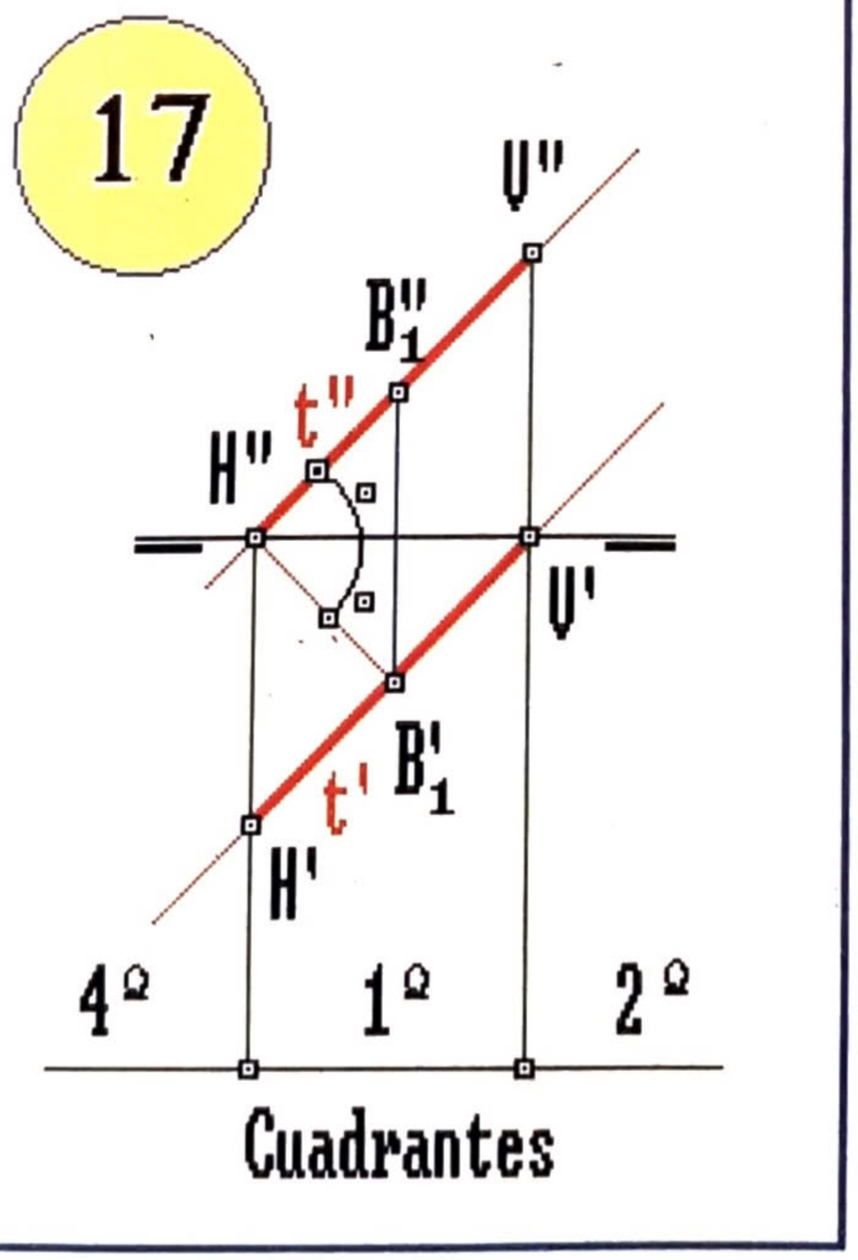
Cuadrantes


V.S
2º Cuadrante
P'''
P''
t'''
1º Cuadrante
H.P
H.A
P'
3º Cuadrante
Q'
Q'''
Q''
4º Cuadrante
V.I

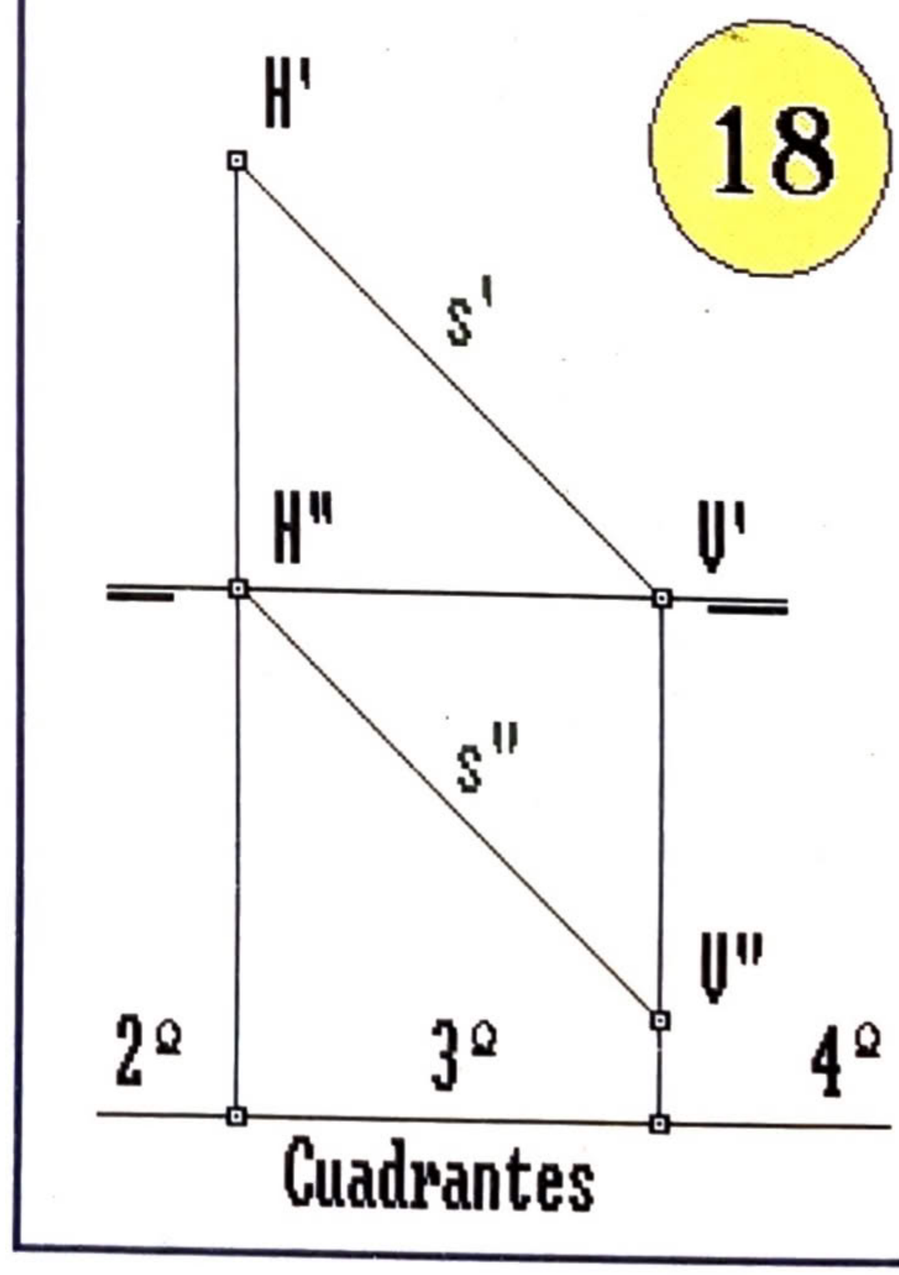
15


2º Cuadrante
P' P''
t'≡t''
V' V''
H' H''
Q' Q''
4º Cuadrante

16

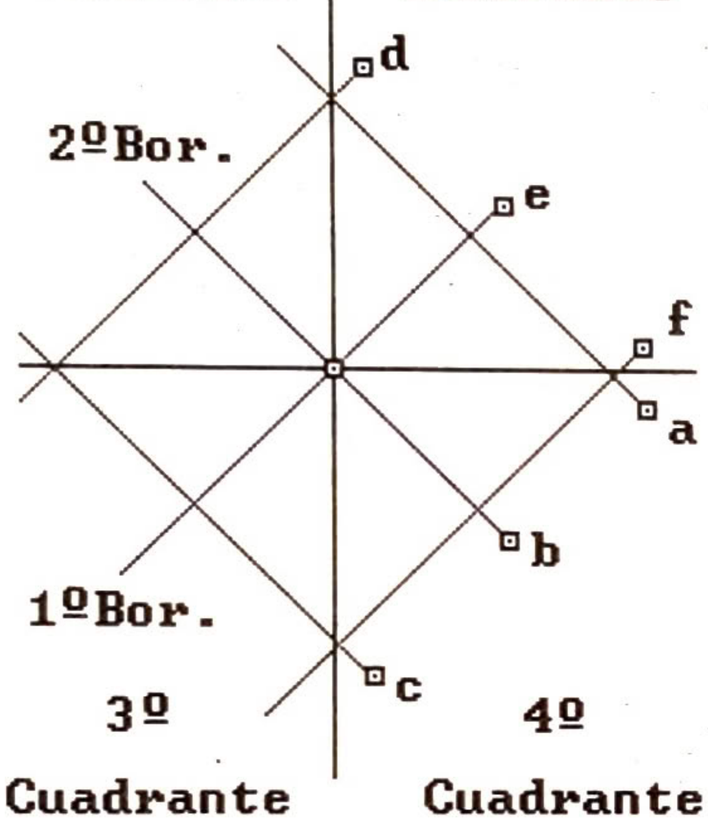

V''
B''1
t''
H''
V'
t'
B'1
H'
4º
1º
2º
Cuadrantes

17

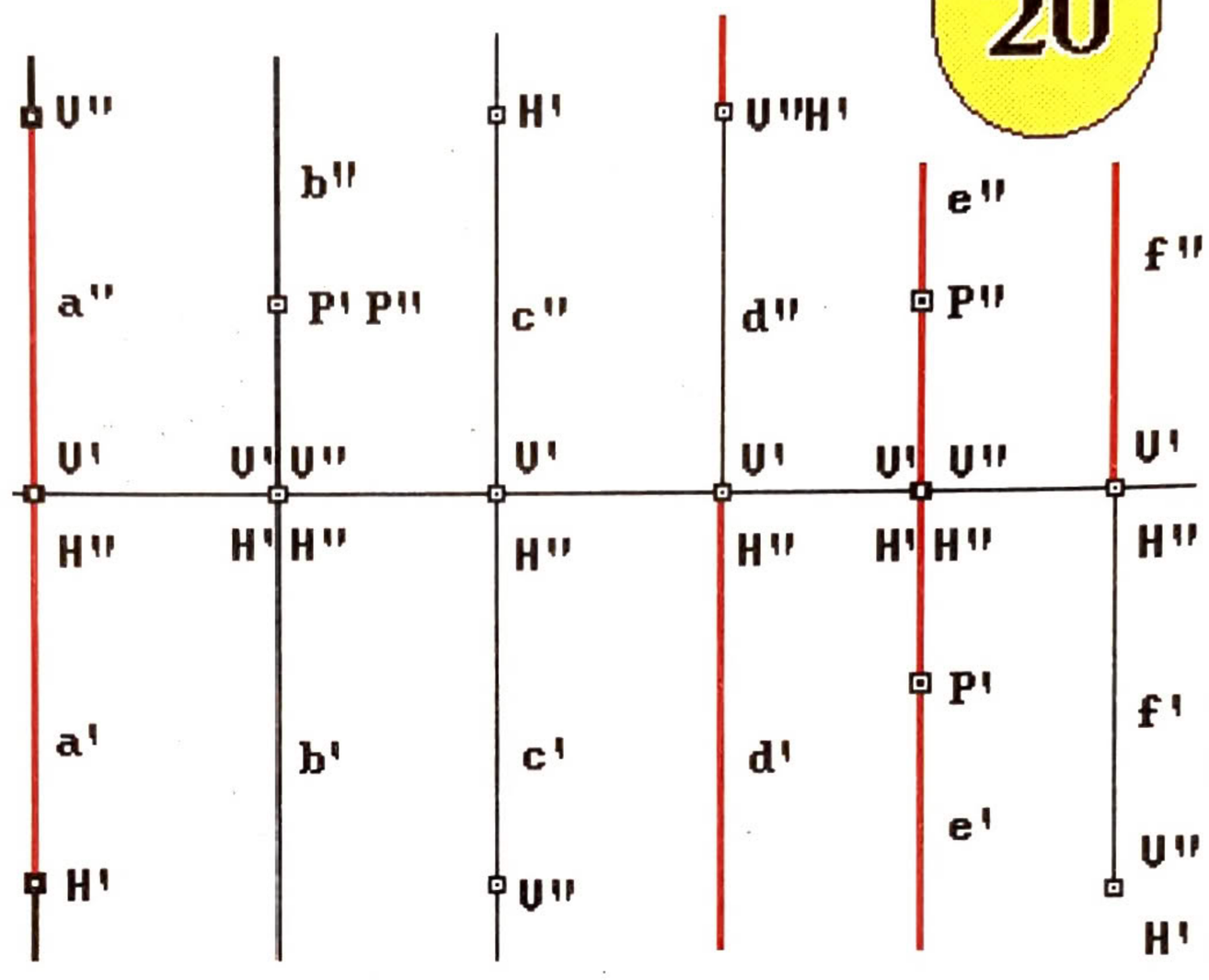

H'
s'
H''
V'
s''
V''
2º
3º
4º
Cuadrantes

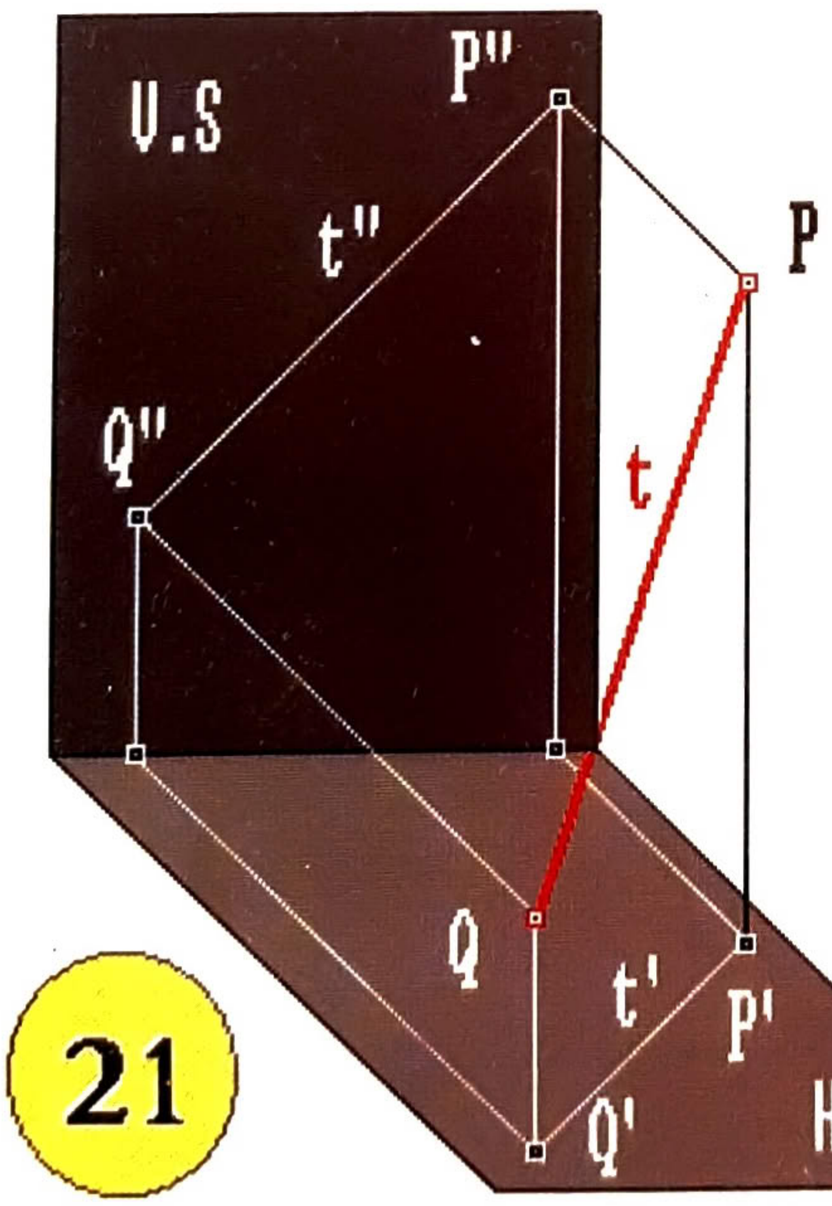
18

19


2º
Cuadrante
1º
Cuadrante
d
2ºBor.
e
f
a
b
1ºBor.
c
3º
Cuadrante
4º
Cuadrante

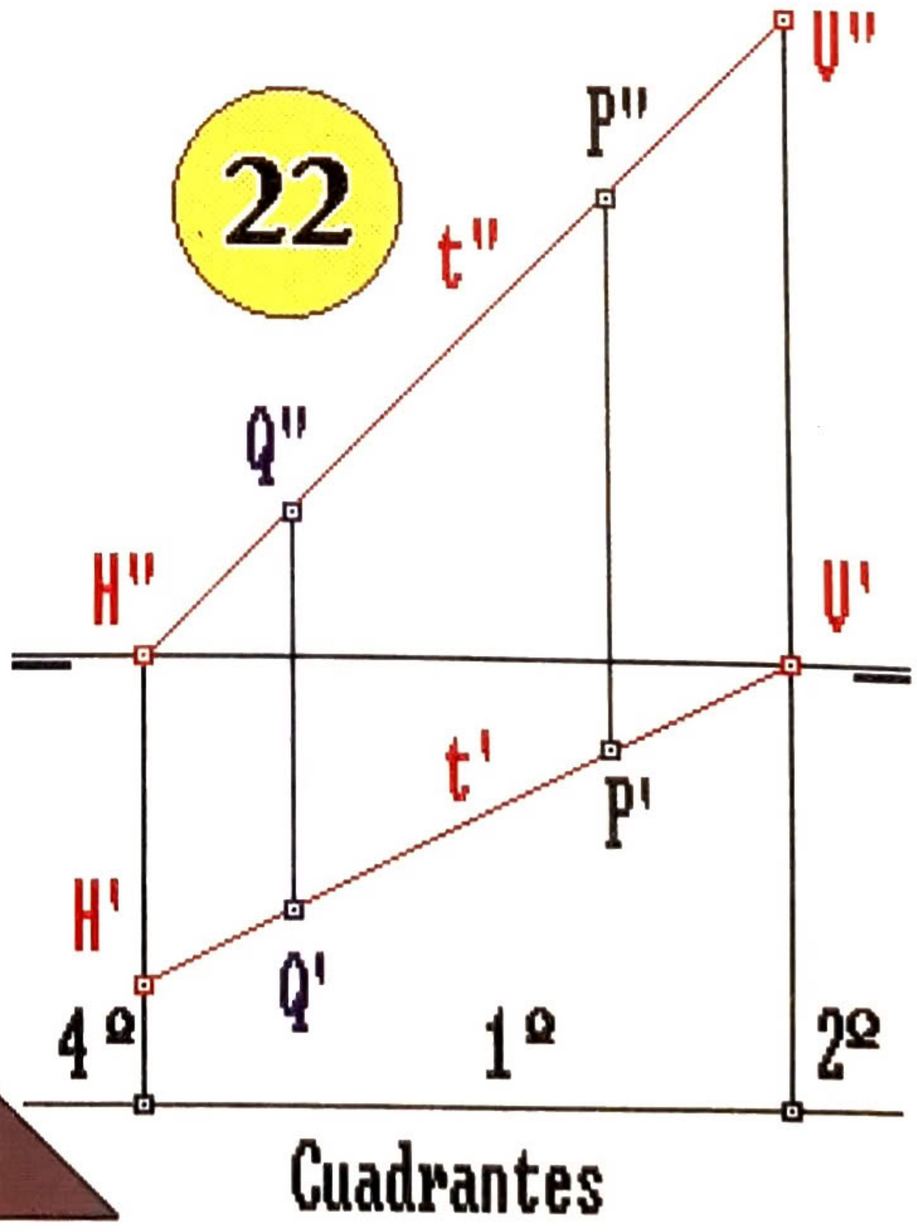
20


V"
b"
P' P"
a"
H'
c"
V"H'
d"
e"
P"
f"
V'
V' V"
V'
V'
V' V"
V'
H"
H' H"
H"
H"
H' H"
H"
P'
a'
b'
c'
d'
f'
e'
H'
V"
H'


V.S
P"
t"
P
Q"
t
Q
t'
P'
Q'
H.A

21

22


V"
P"
t"
Q"
H"
V'
t'
P'
H'
Q'
4º
1º
2º
Cuadrantes

Alfabeto del plano.

ALFABETO DEL PLANO

Un plano queda determinado por:

* Tres puntos del espacio no alineados.
* Dos rectas que se cortan.
* Un punto y una recta que no se pertenezcan.
* Dos rectas paralelas.

Los planos pueden ocupar en el espacio distintas posiciones y en el sistema diédrico se representarán por sus trazas.

Se entiende por traza de un plano a la intersección de éste con los planos de proyección.

Un plano tiene por tanto dos trazas, la horizontal y la vertical.

PLANOS PARALELOS AL HORIZONTAL

En la fig. 1 se representan los planos α, β y π, estando el plano α sobre el plano horizontal, el β en él y el π debajo del plano horizontal.

En la fig. 2 hemos representado los mismos planos, en el sistema diédrico, es decir, sus trazas.

Las trazas de los planos α, β y π son respectivamente α'', β'' y π''.

Estos planos al ser paralelos al plano horizontal, carecen de intersección con dicho plano, motivo éste de no poder representarse las trazas horizontales α', β' y π' ya que se encuentran en el infinito.

PLANOS PARALELOS AL VERTICAL

En la fig. 3 se representan los planos α, β y π, estando el plano α delante del plano vertical, el β en él y el π detrás de él.

En la fig. 4 hemos representado los planos en el sistema diédrico.

Sus trazas horizontales son α', β' y π' careciendo de trazas verticales ya que los planos en el espacio al ser paralelos al vertical, su intersección estará en el infinito.

PLANOS PROYECTANTES

Los planos proyectantes pueden ser; proyectantes horizontales o verticales, según sean perpendiculares al plano horizontal o vertical de proyección respectivamente.

En las figs. 5 y 6 hemos representado los planos α proyectante horizontal y β proyectante vertical, tanto en el espacio, como su representación en el sistema diédrico.

En el caso de la fig. 5 el plano proyectante horizontal, forma un ángulo con el vertical, determinado por la inclinación de su traza horizontal α' con respecto a L.T.

Su traza vertical α'' será perpendicular a L.T.

En el caso de la fig. 6, el plano proyectante vertical, en su representación en el sistema diédrico, nos dará la inclinación que dicho plano tiene con el horizontal de proyección, esta inclinación, es el ángulo formado, entre su proyección vertical β'' y la L.T.

La proyección horizontal β' será perpendicular a L.T.

PLANOS PARALELOS A LINEA DE TIERRA

Los planos que sean paralelos a L.T. tendrán también sus trazas paralelas a L.T.

Su traza vertical α'' nos indicará la intersección del plano con el plano vertical, mientras que la traza horizontal α' nos indicará la intersección del plano con el plano horizontal.

Observando la fig. 7 vemos que α' es la traza horizontal y α'' la traza vertical. La distancia entre α'' y la L.T. será la COTA de la recta intersección y la distancia entre α' y la L.T. será el ALEJAMIENTO de la recta intersección.

La relación existente entre cota y alejamiento, será igual a la tangente del ángulo formado por el plano α con el plano horizontal de proyección.

PLANOS QUE PASAN POR LINEA DE TIERRA

Los planos que pasan por L.T. (ver fig. 8), no quedan definidos por el conocimiento de sus trazas, ya que éstas coinciden con la L.T.

Para poder definir este tipo de planos es necesario conocer las proyecciones de un punto, tal como el P, que pertenezca al plano.

En nuestro caso, el plano α, sus proyecciones α' y α'' son coincidentes con L.T., pero al pasar por el punto P del espacio, cuyas proyecciones P' y P'' conocemos, podemos saber el ángulo que el plano forma con el plano horizontal y consecuentemente con el vertical es decir, el plano queda definido.

PLANO OBLICUO O GENERICO

Plano oblicuo es aquel cuyas trazas horizontal y vertical son oblicuas respecto a L.T.

En la fig. 9 el plano α corta al plano horizontal en α', y al vertical en α''.

A la derecha de la imagen hemos representado las trazas α' y α'', coincidentes con el punto P de la L.T., como se puede observar , sólo hemos representado la zona del plano α que pertenece al 1º cuadrante.

Si prolongamos las trazas α' y α'', el plano será el mismo.

En la fig. 14 hemos prolongado las trazas para poder representar las distintas zonas del plano α en cada uno de los cuadrantes.

PLANOS PERPENDICULARES AL PRIMER BISECTOR

Cuando las trazas de un plano oblicuo α forman el mismo ángulo con la L.T., dicho plano será perpendicular al 1º bisector.

En la fig. 10, α' forma el mismo ángulo con L.T. que α''.

PLANOS PERPENDICULARES AL SEGUNDO BISECTOR

Cuando las trazas de un plano oblicuo α estén en línea recta, dicho plano será perpendicular al 2º bisector.

En la fig. 11 podemos observar cómo las trazas α' y α'' se confunden después de abatir el plano horizontal.

PLANO DE PERFIL

Es el plano que siendo perpendicular a los de proyección, también lo es a los dos planos bisectores. Su imagen sería una recta perpendicular a L.T.

DETERMINACION DE PLANOS

Para que un plano contenga a una recta es necesario que las trazas de ésta, estén contenidas en las trazas del plano.

En la fig. 12 hemos representado el plano β determinado por los puntos no alineados a, b y c.

Para resolver este caso se unen dos puntos cualesquiera, por ejemplo, aquí hemos unido los puntos a y b para obtener la recta m y consecuentemente sus trazas.

El tercer punto c, lo unimos con el a o con el b, en nuestro caso con el a para obtener las trazas de la recta n.

Unidas ordenadamente las trazas de las rectas m y n, obtendremos las trazas α' y α'' del plano determinado por los puntos a, b y c.

Como podemos observar, este caso resuelve otros como:

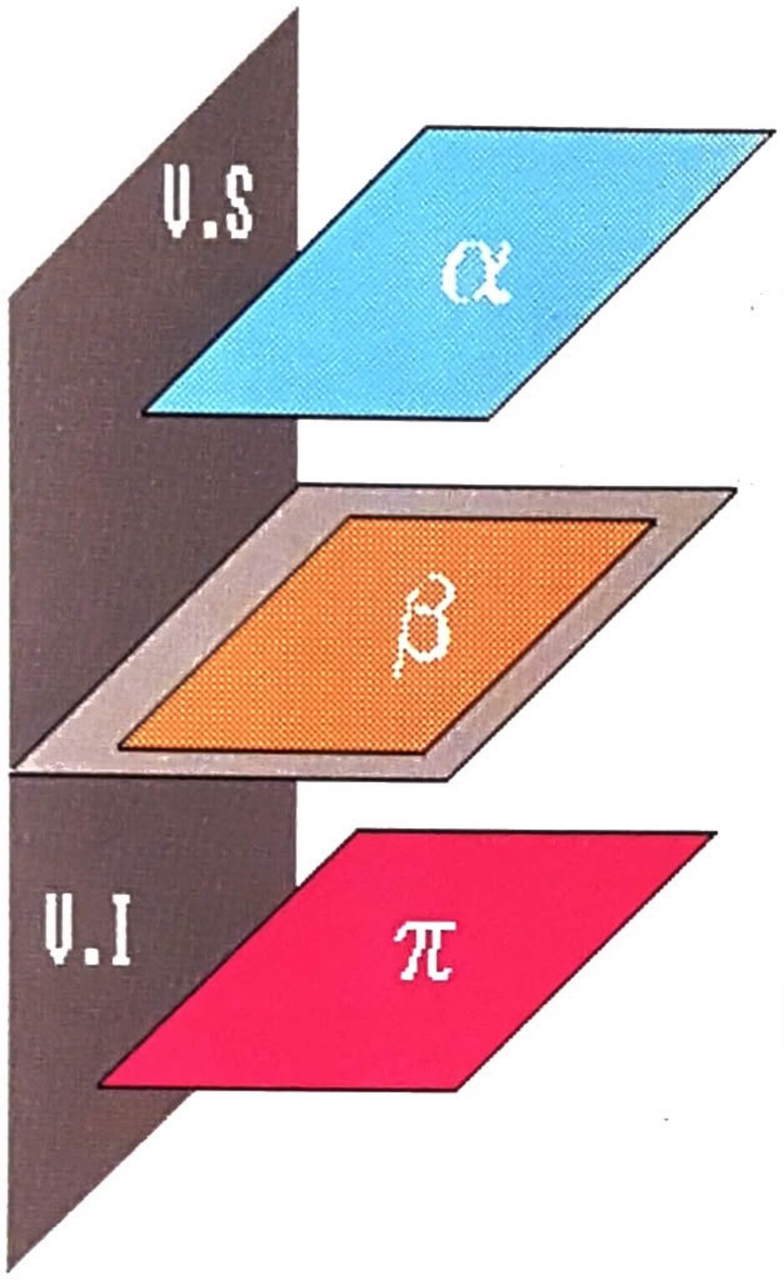
a.- Determinar las trazas de un plano, definido por un punto y una recta, que no se pertenezcan.

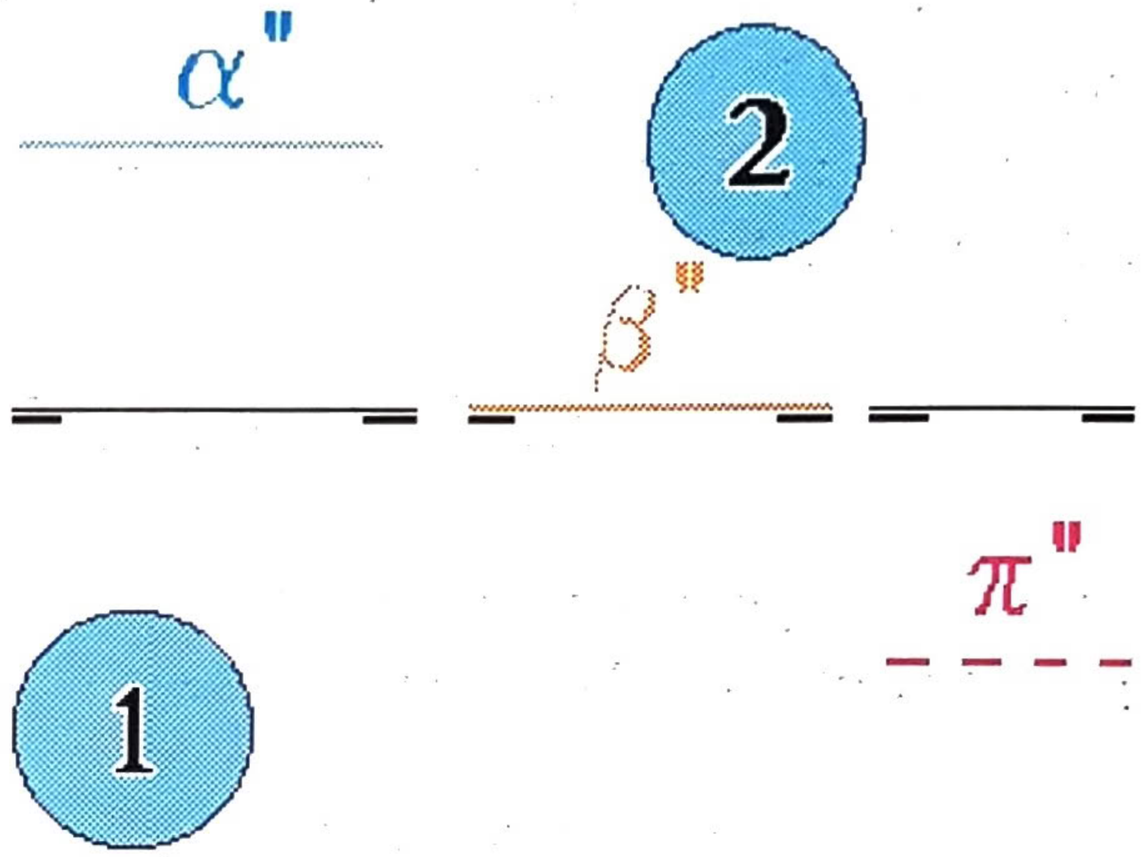
b.- Por dos rectas que se cortan.

En la fig. 13 hemos encontrado las trazas α' y α'' del plano determinado por dos rectas paralelas t y s.

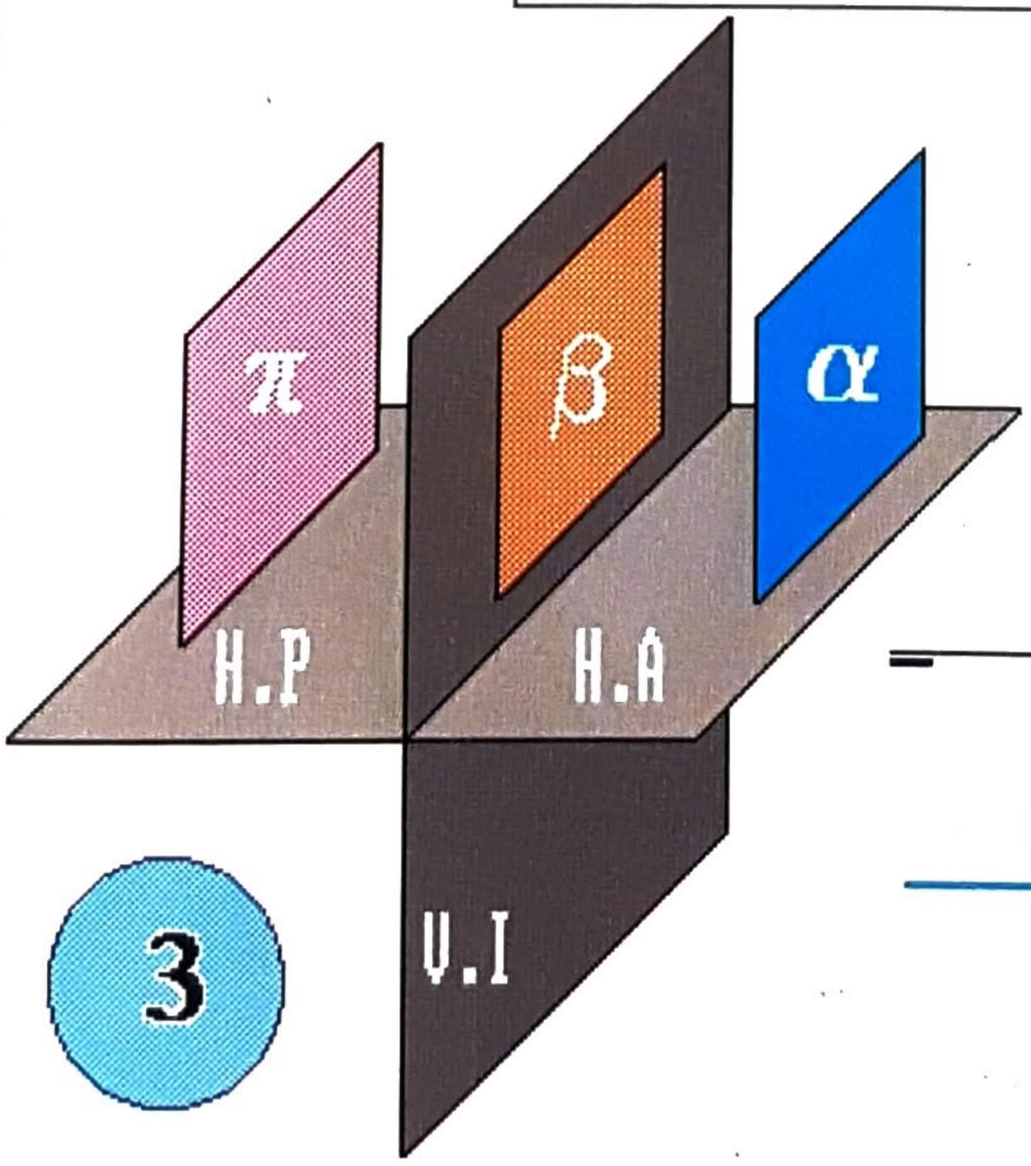
Este caso quedará resuelto encontrando las trazas de ambas rectas que unidas entre sí ordenadamente, nos darán la solución.

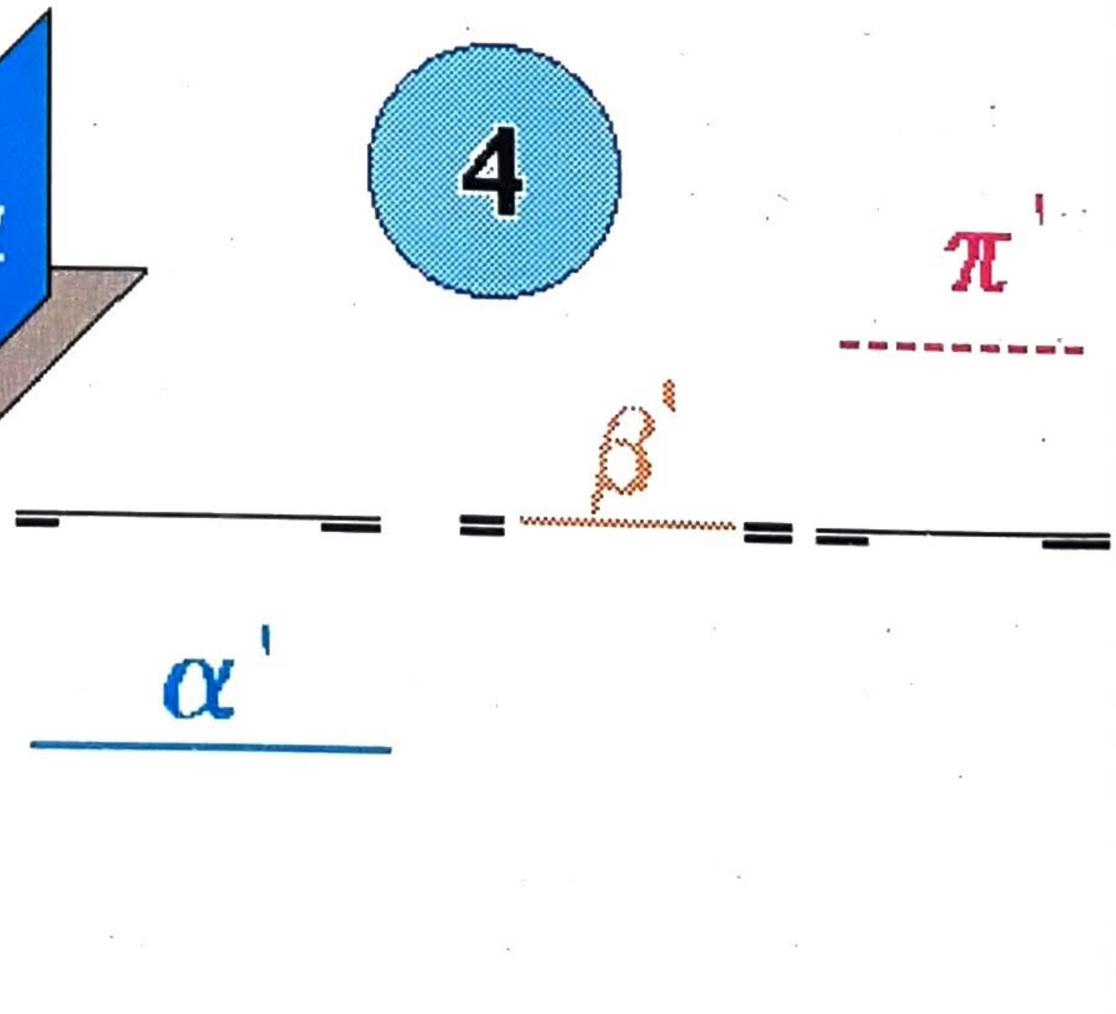
PLANOS PARALELOS AL HORIZONTAL



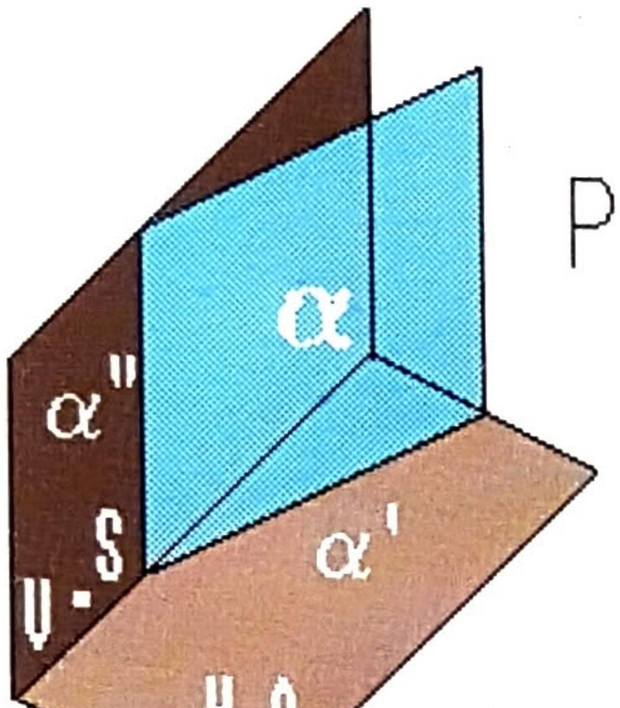


PLANOS PARALELOS AL VERTICAL

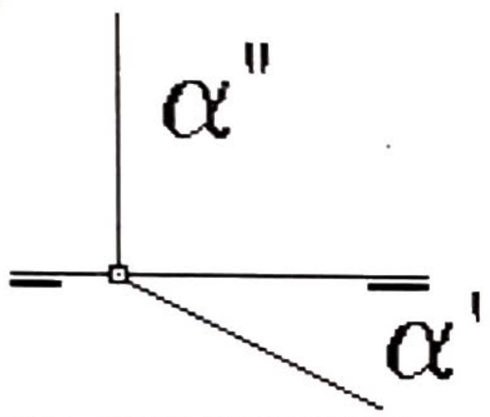




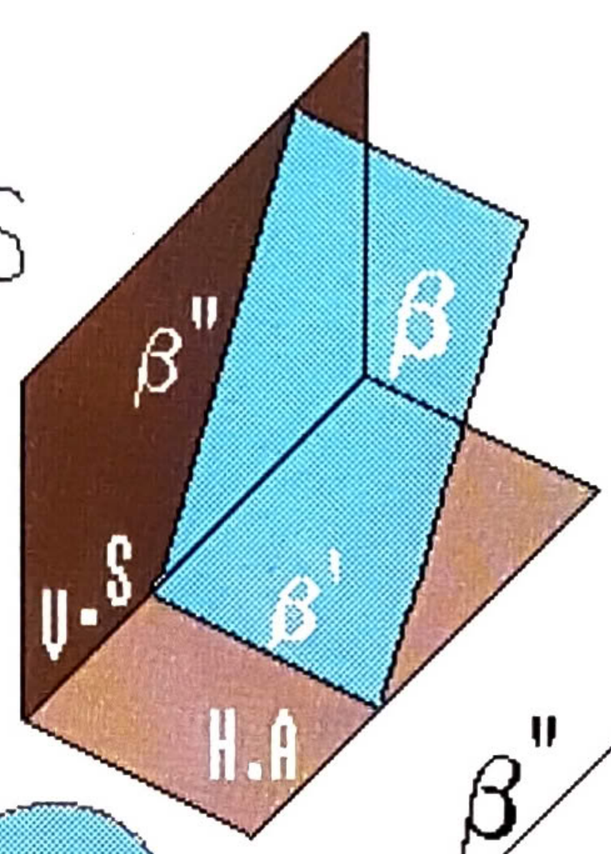
PLANOS PROYECTANTES



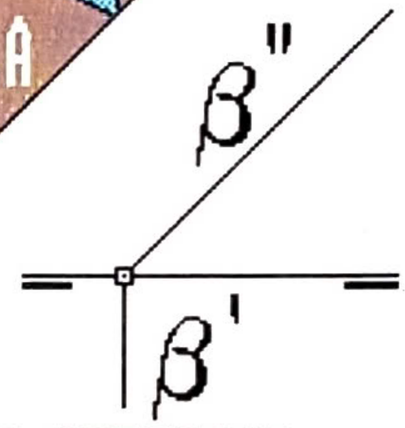
5



PROYECTANTE HORIZONTAL

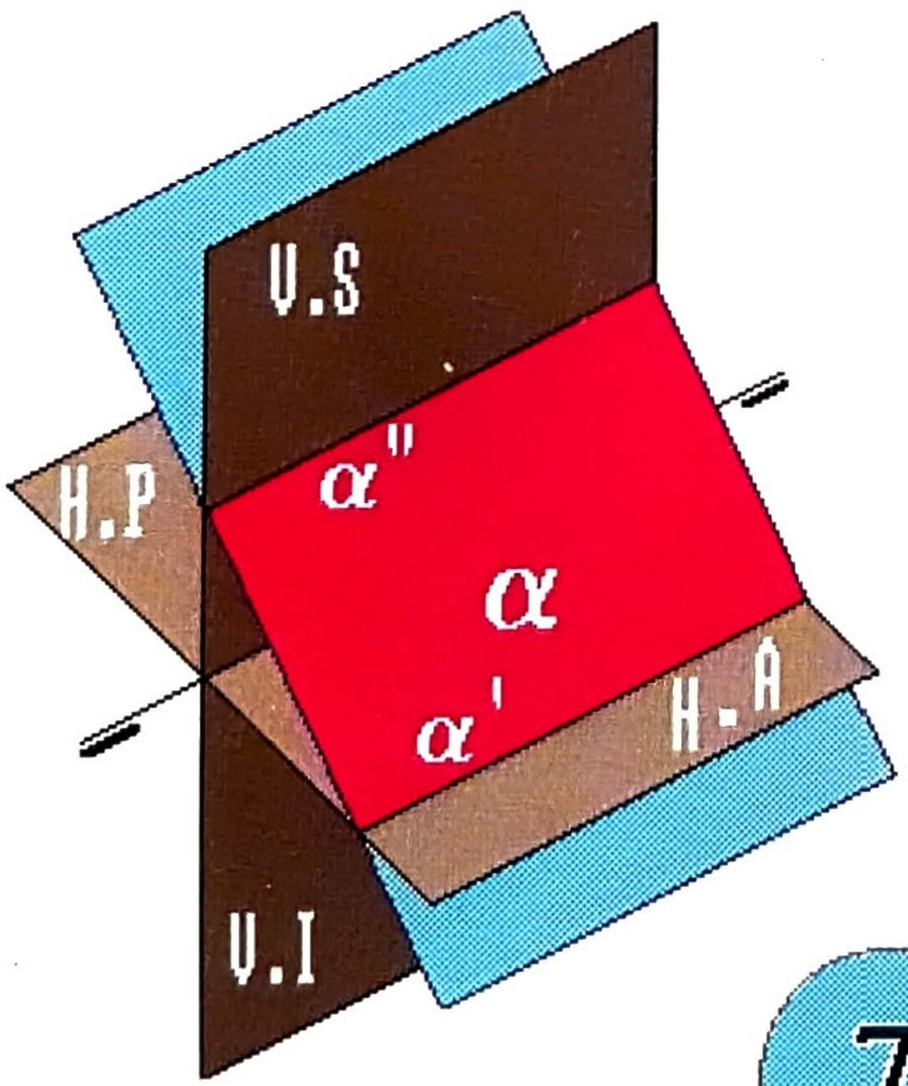


6



PROYECTANTE VERTICAL

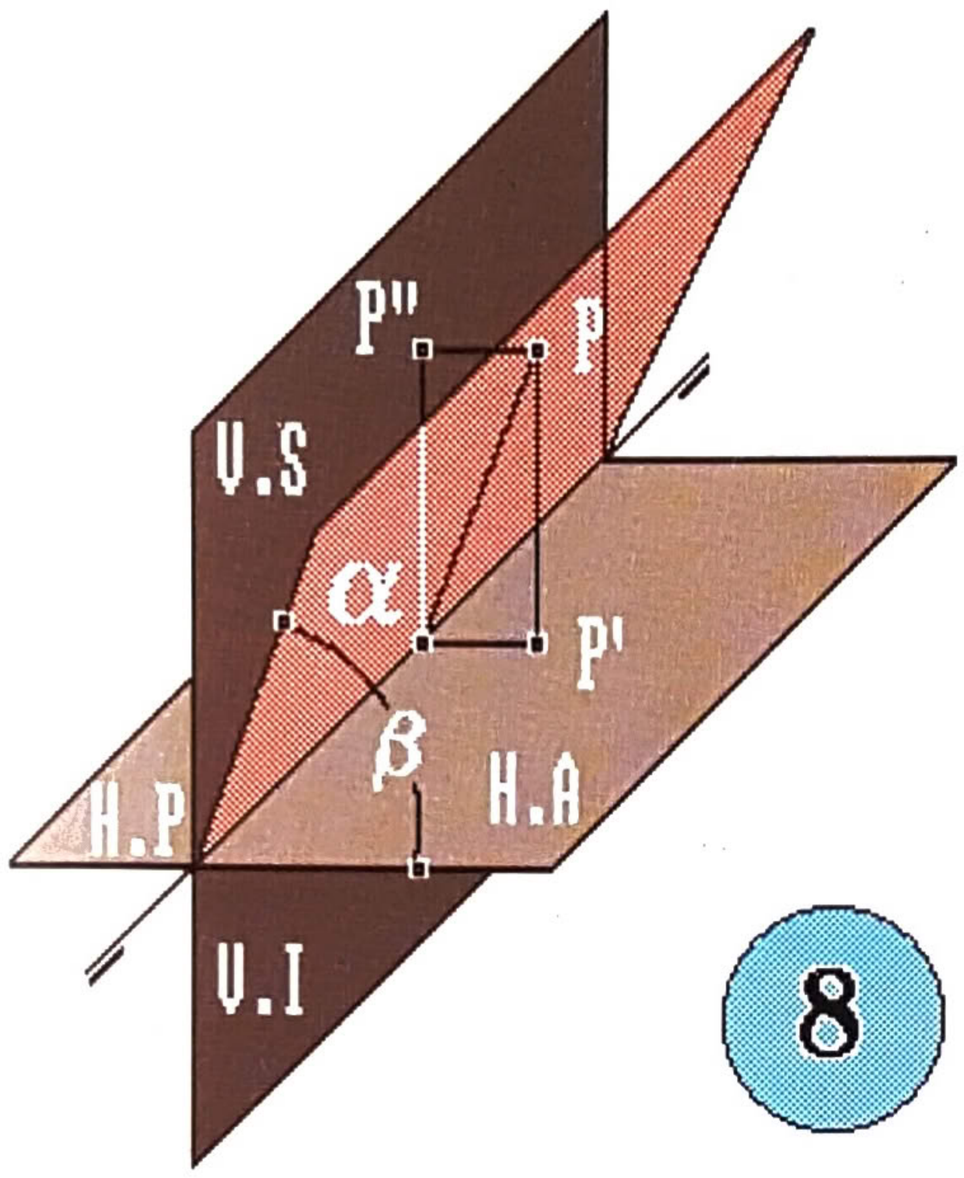
PLANO PARALELO A LINEA DE TIERRA



7

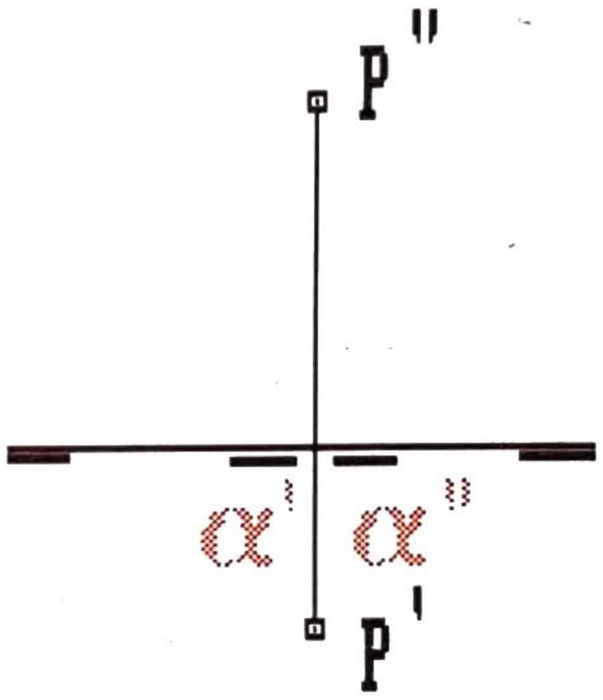
α''

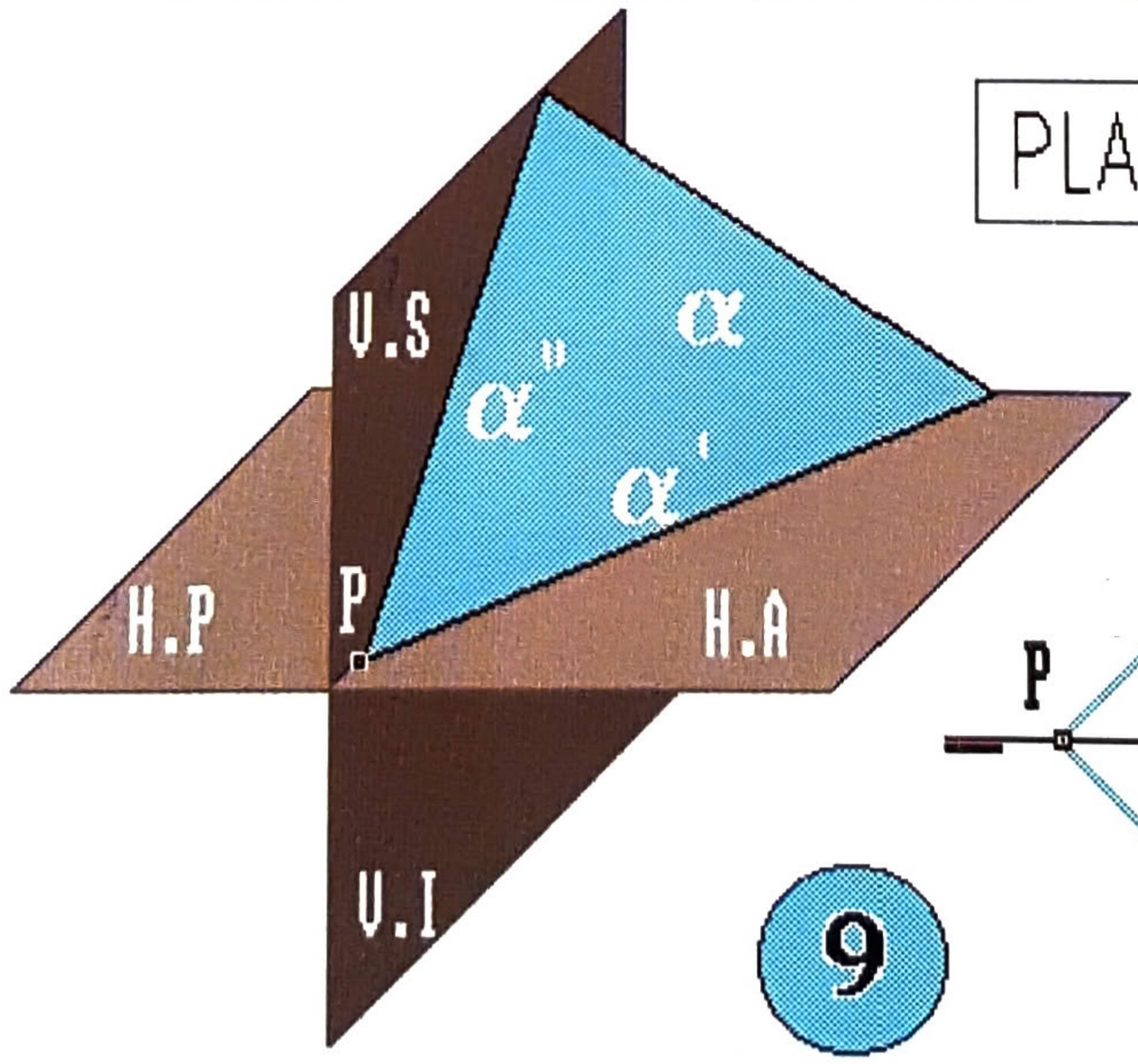
α'



PLANO QUE PASA POR LINEA DE TIERRA

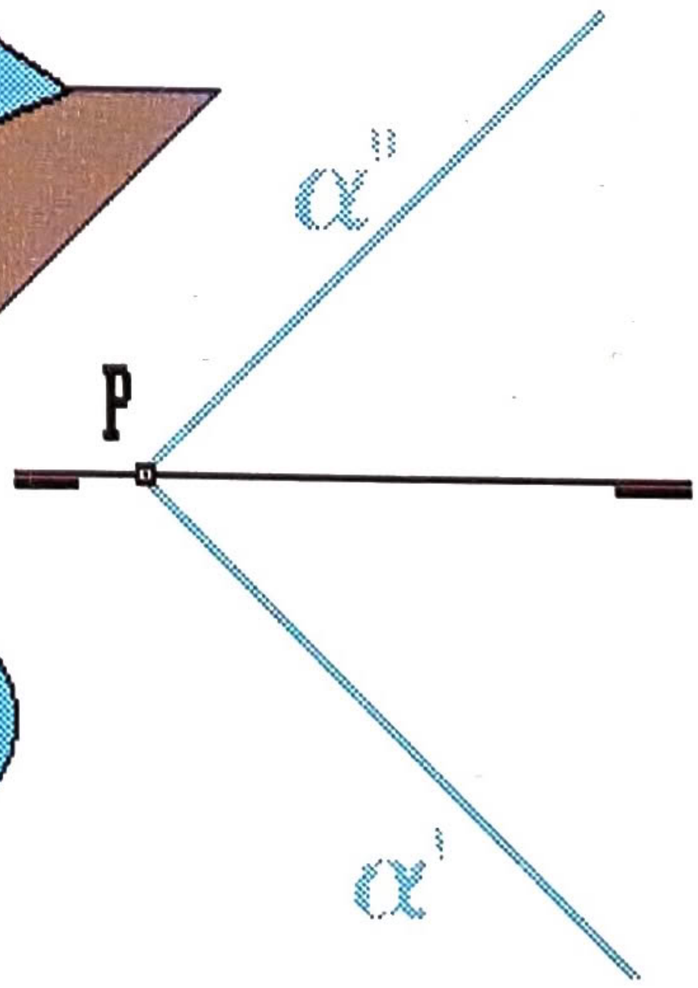
8

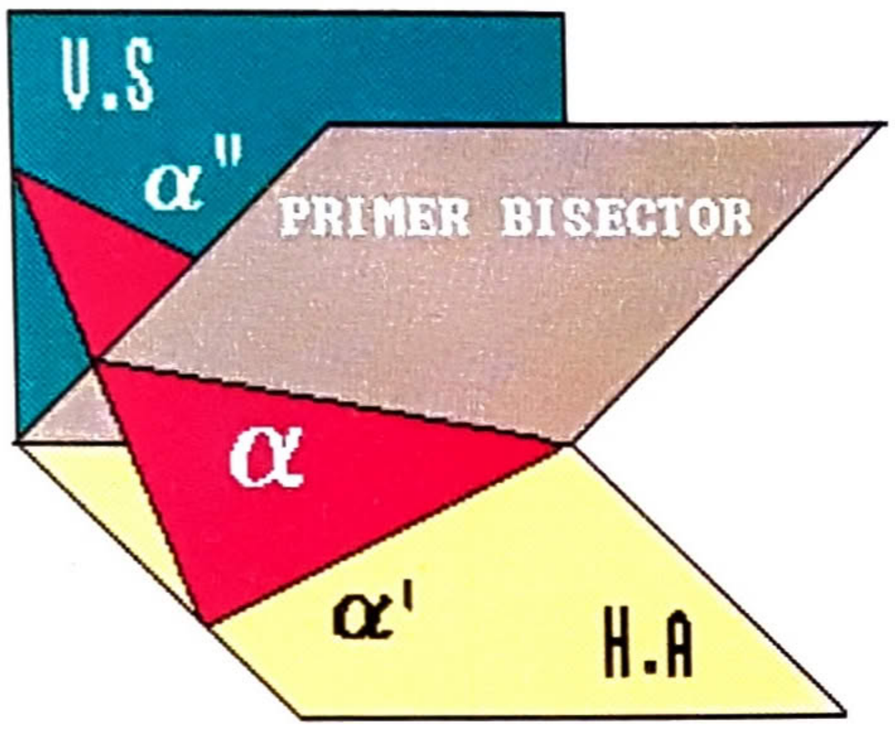




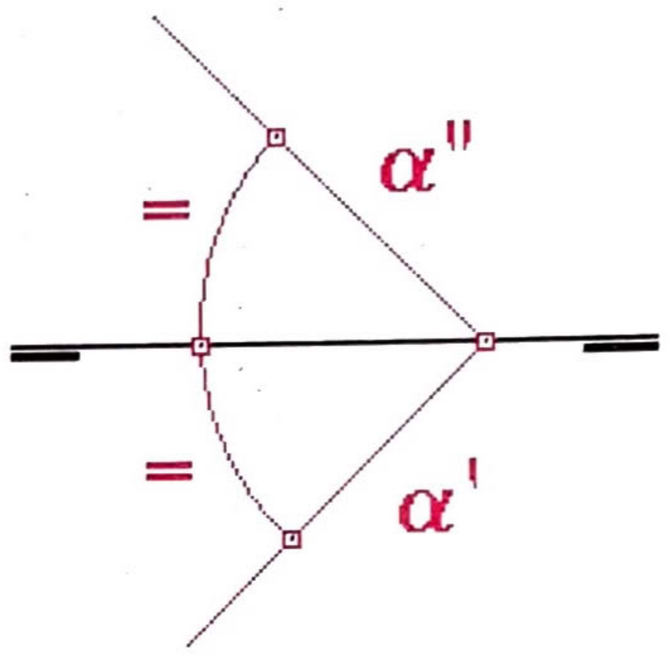
PLANO OBLICUO

9

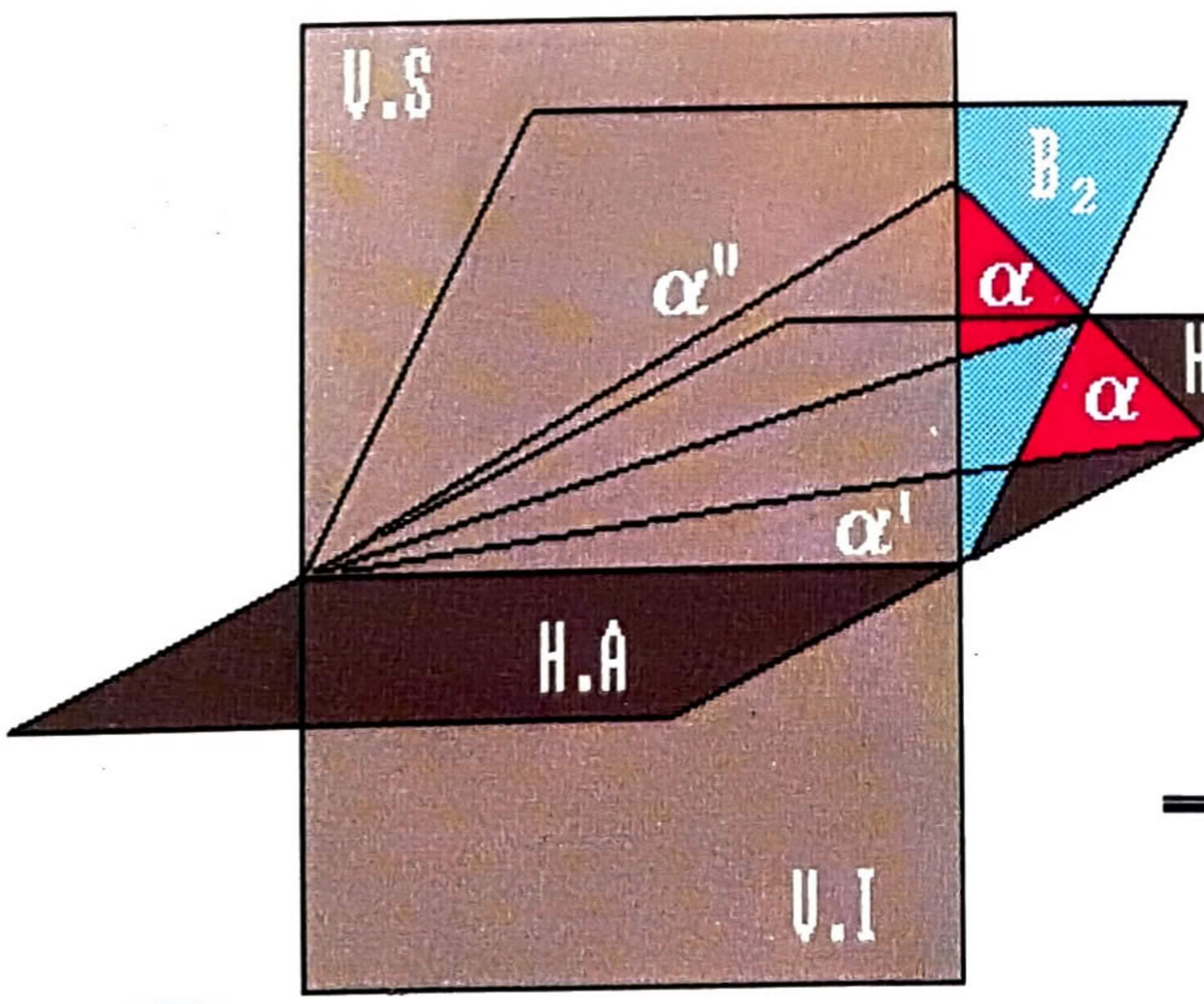




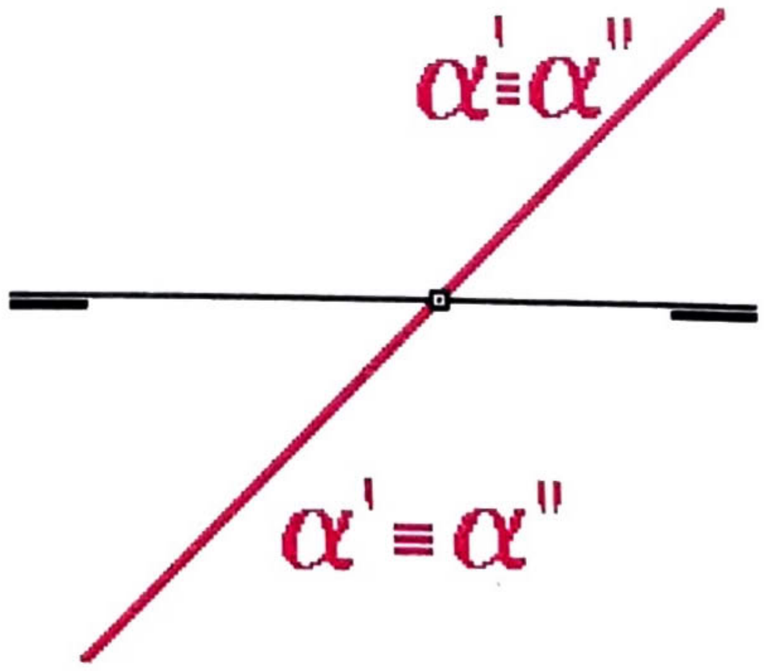
PLANO PERPENDICULAR AL PRIMER BISECTOR



10

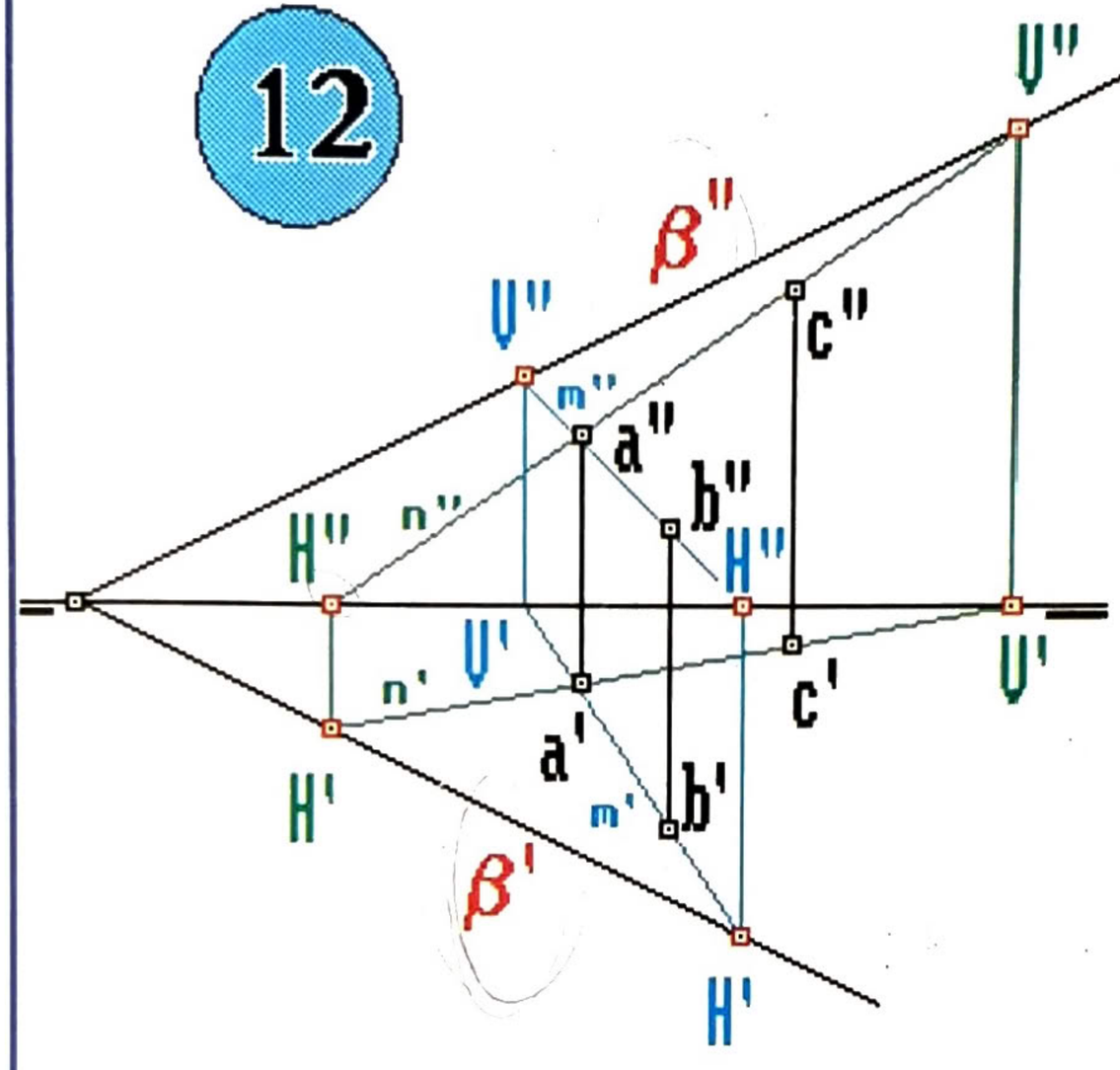


PLANO PERPENDICULAR AL SEGUNDO BISECTOR

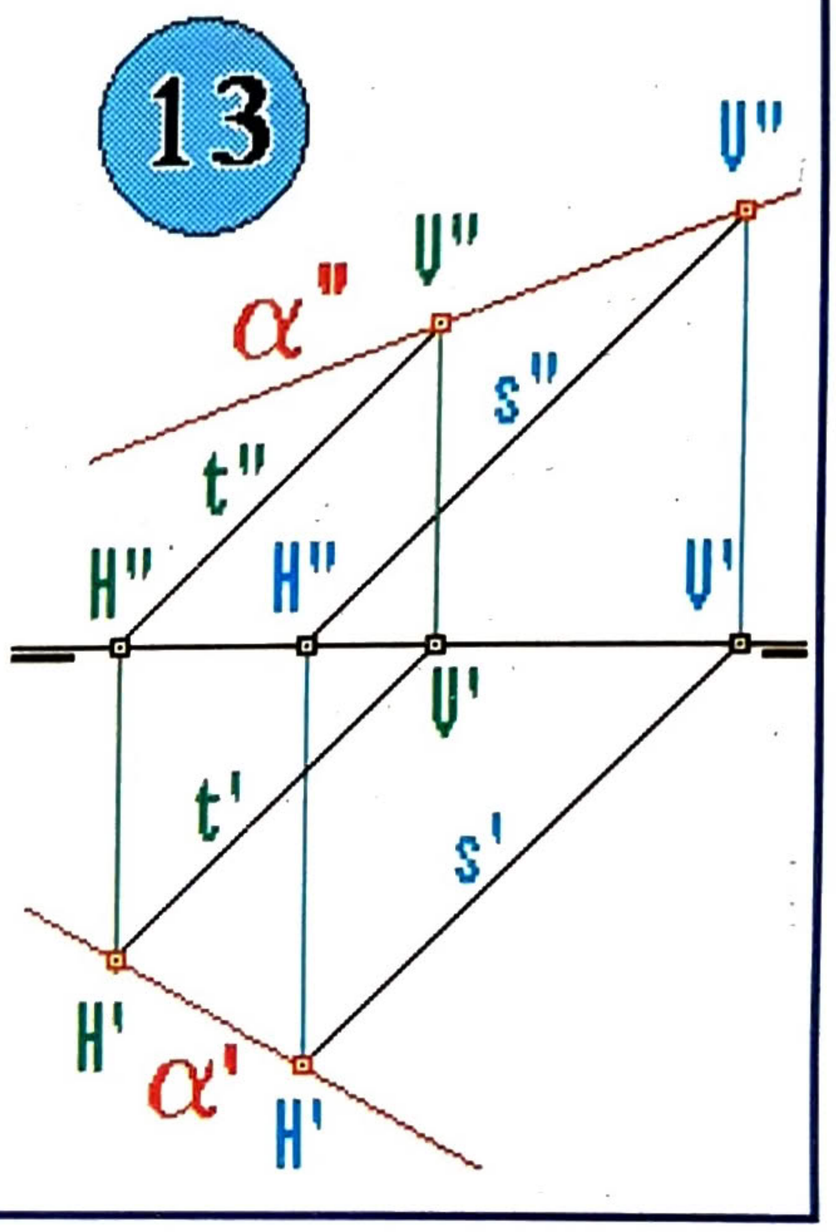


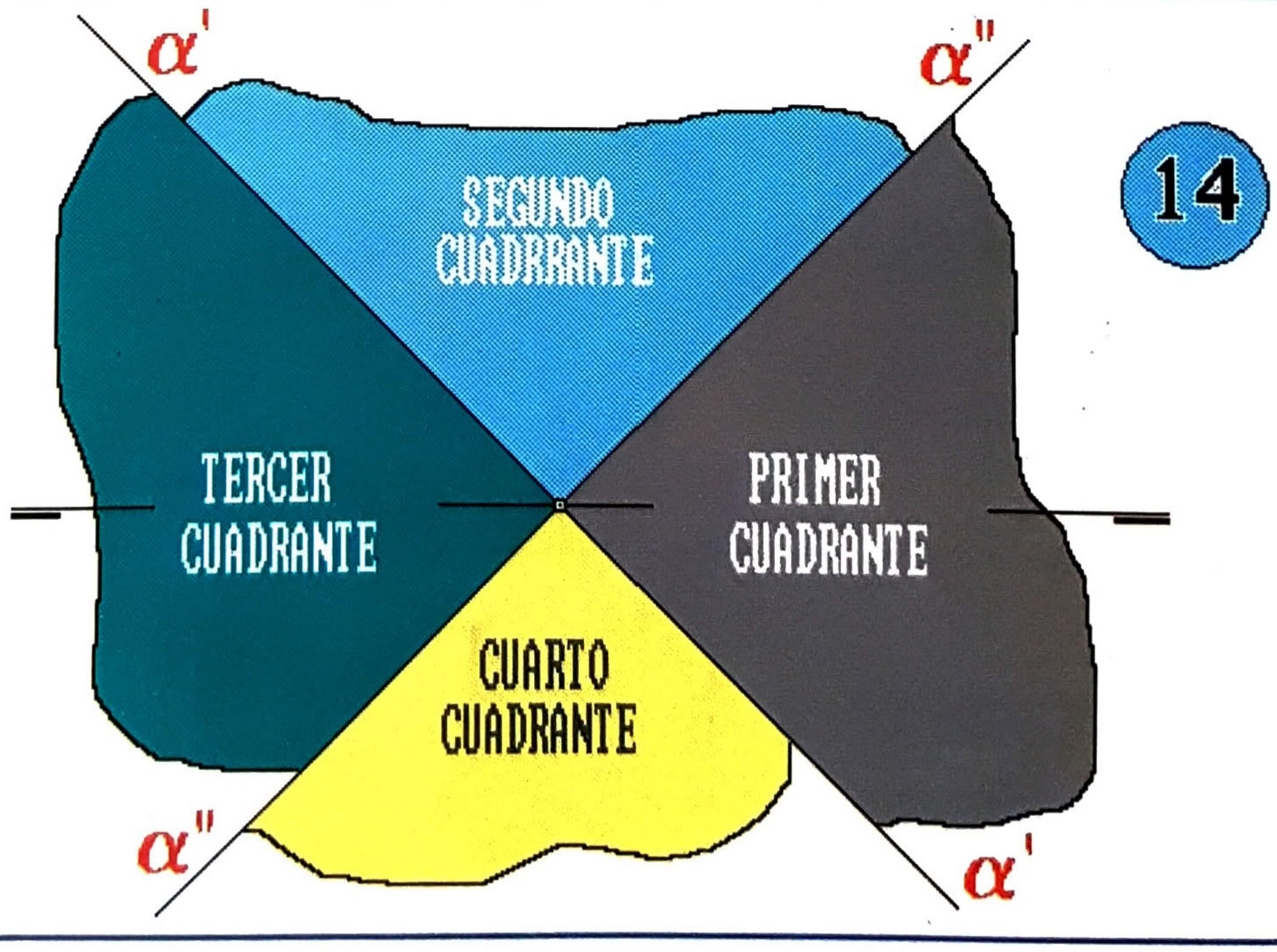
11

12


V''
β''
V''
c''
m''
a''
b''
H''
n''
H''
V'
n'
a'
c'
V'
H'
b'
m'
β'
H'

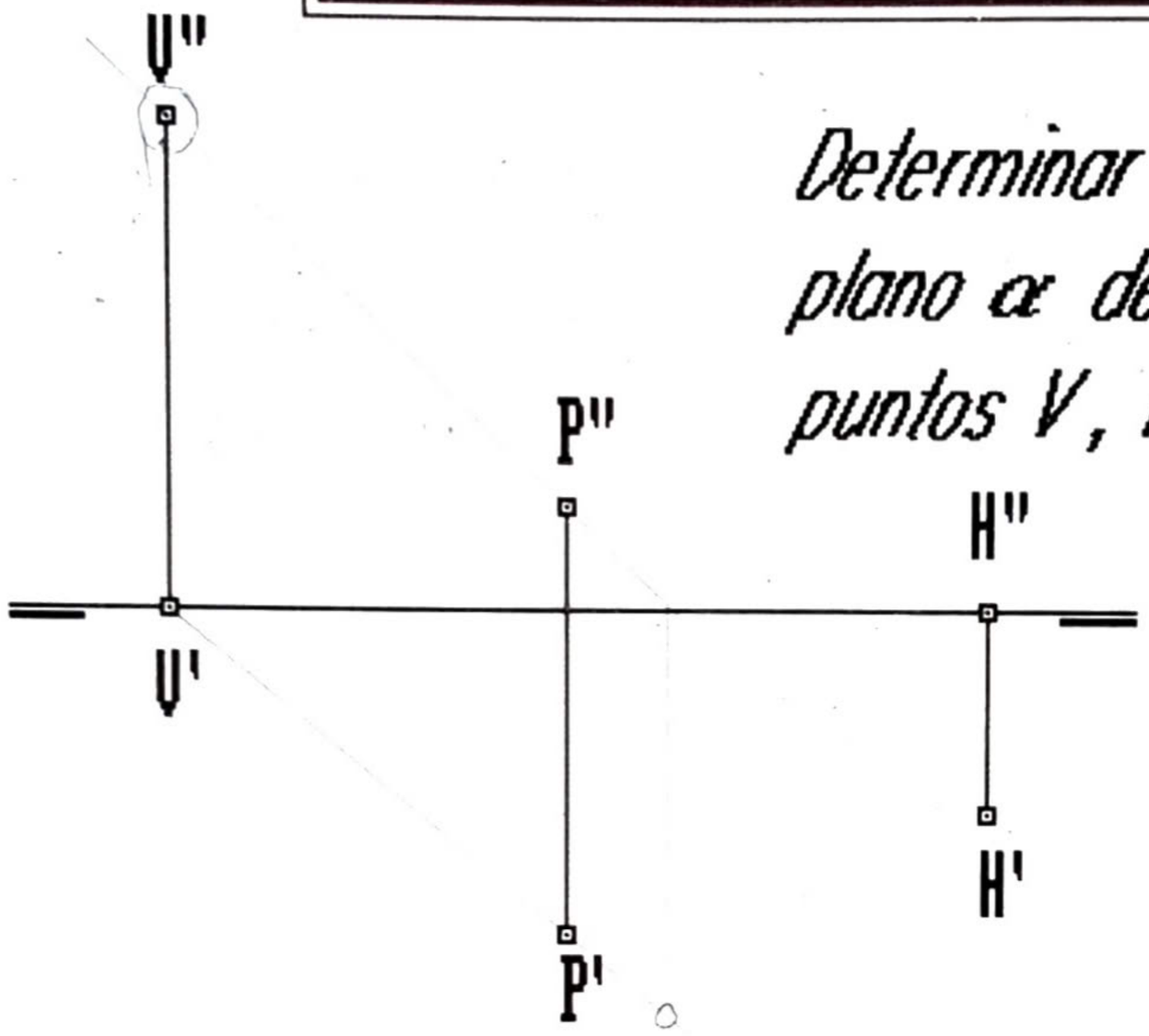
13


V''
α''
V''
s''
t''
H''
H''
V'
V'
t'
s'
H'
α'
H'

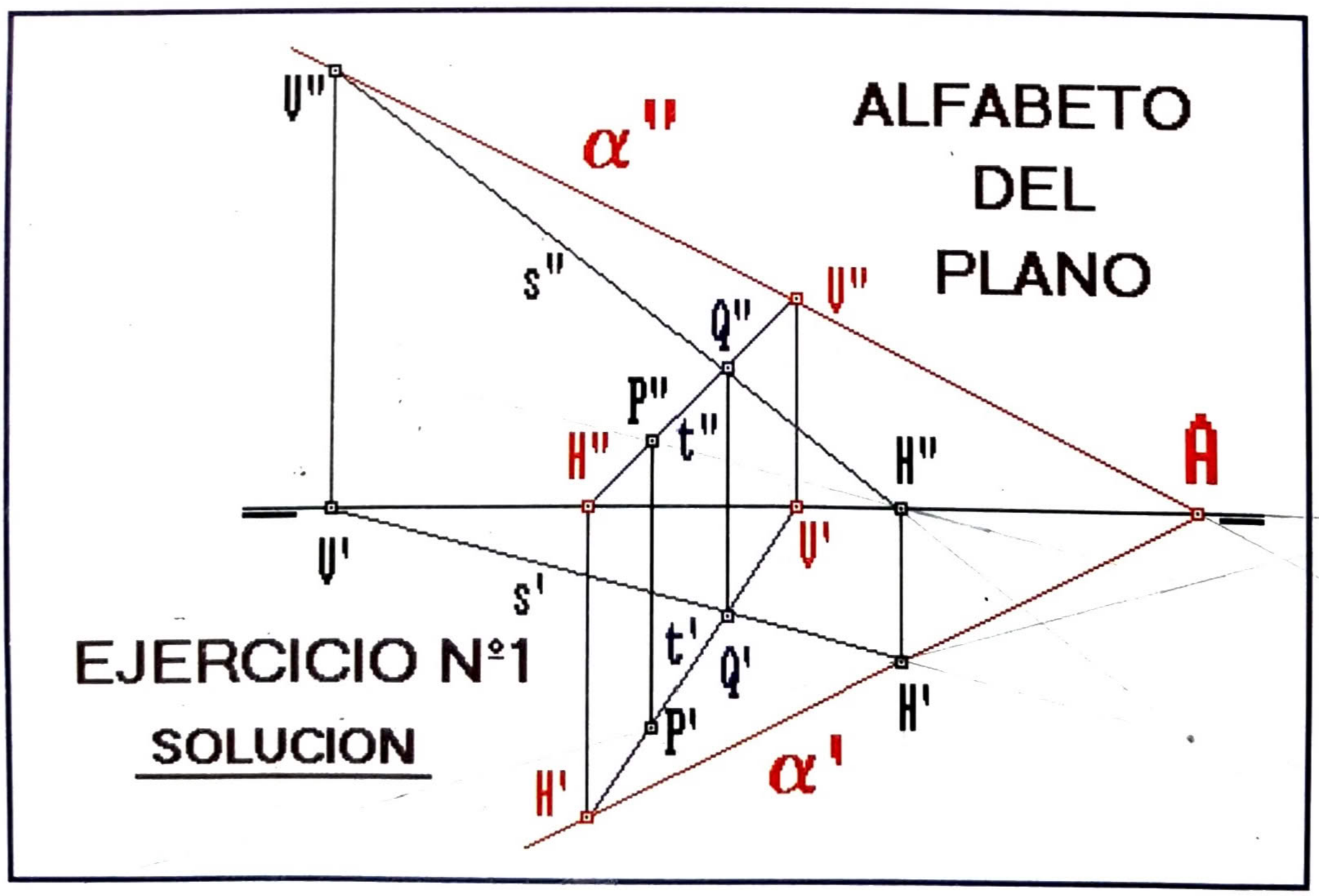

α'
α''
SEGUNDO CUADRANTE
TERCER CUADRANTE
PRIMER CUADRANTE
CUARTO CUADRANTE
α''
α'

14

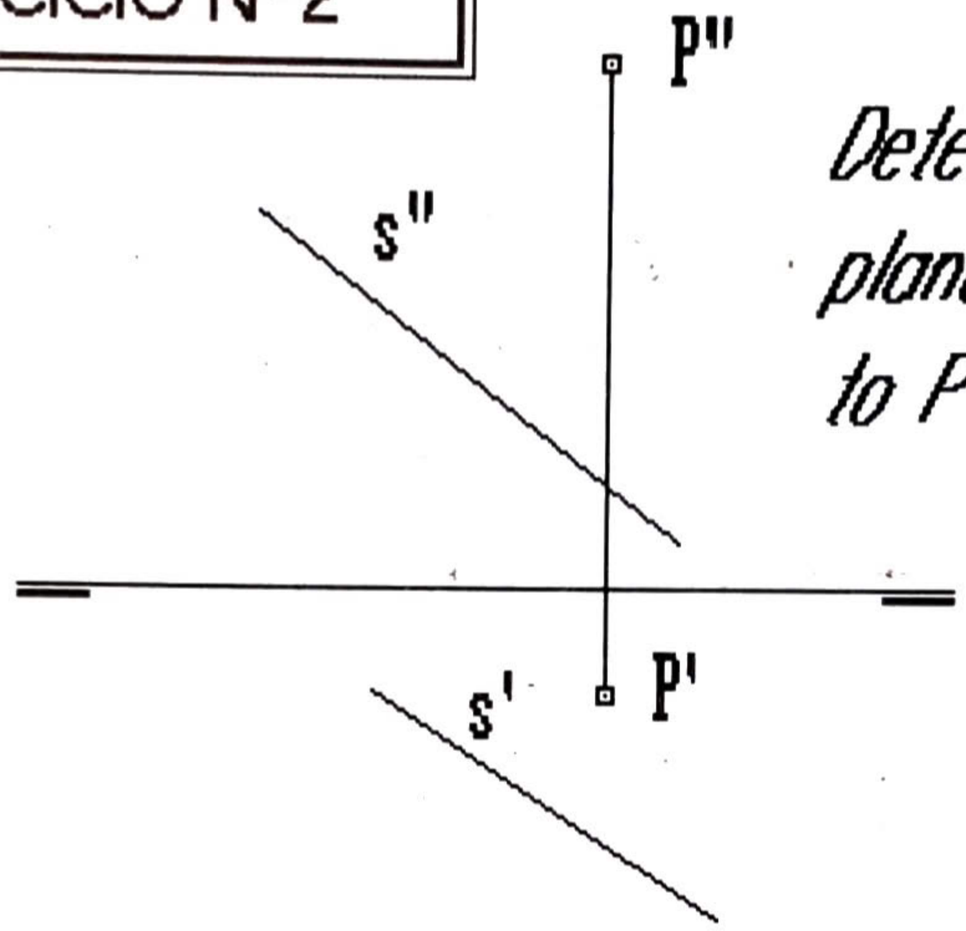
ALFABETO DEL PLANO
EJERCICIO Nº1



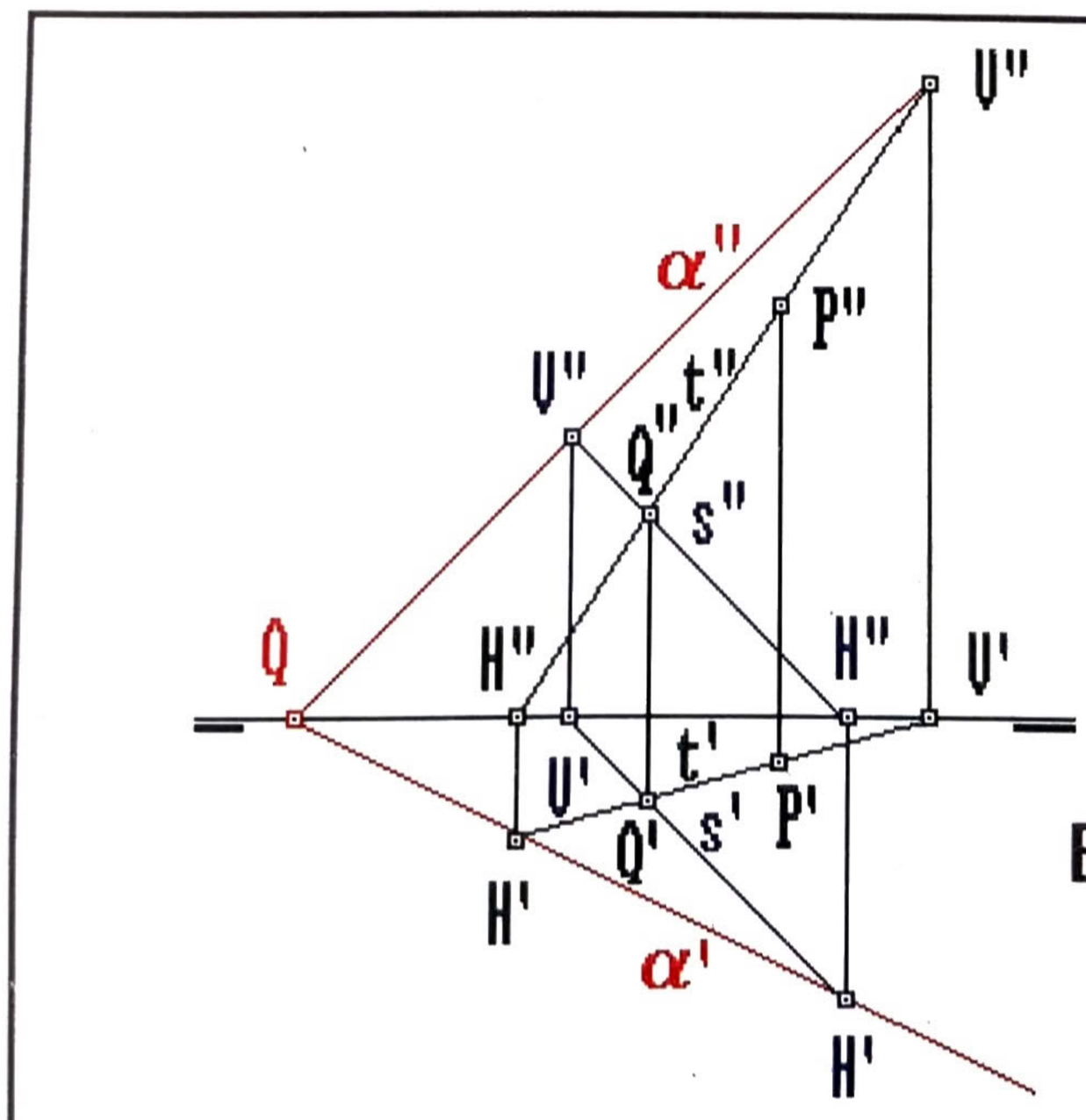
Determinar las trazas del plano α definido por los puntos V, H y P.



ALFABETO DEL PLANO
EJERCICIO Nº2



Determinar las trazas del plano definido por el punto P y la recta s.



ALFABETO DEL PLANO

EJERCICIO Nº2

SOLUCION

ALFABETO DEL PLANO

COMENTARIOS EJERCICIO Nº1.

a.- Unimos las proyecciones V'H' y V''H'' para obtener las proyecciones s' y s'' de la recta s definida por los puntos V y H.

b.- Tomamos un punto cualquiera que pertenezca a la recta s (En nuestro caso , el punto Q).

c.- Unimos las proyecciones P'Q' y P''Q'' para obtener las proyecciones de la recta t.

d.- Esta nueva recta t cortará a la recta s en el punto Q y por tanto ambas rectas , definen un plano. (Rectas que se cortan).

e.- Uniendo las trazas verticales V'' de las rectas s y t obtendremos la traza vertical α'' del punto solución ; uniendo las trazas horizontales H' de las rectas s y t , obtendremos la traza horizontal α' del plano solución.

COMENTARIOS EJERCICIO Nº2.

a.- Prolongamos las proyecciones de la recta dada s para obtener sus trazas horizontal y vertical ,H' y V'' respectivamente.

b.- Tomamos un punto cualquiera de la recta s, en nuestro caso el punto Q.

c.- Unimos las proyecciones P'Q' y P''Q'' para obtener las proyecciones de la nueva recta t.

d.- La unión de las trazas de las rectas s y t determinarán las trazas del plano pedido , en nuestro caso el α.

Puntos y rectas contenidos en planos.

PUNTOS Y RECTAS CONTENIDOS EN PLANOS

1º.- Una recta está contenida en un plano, cuando las trazas de la recta están contenidas en las trazas homónimas del plano.

2º.- Un punto pertenece a un plano cuando sus proyecciones están contenidas en las proyecciones homónimas de la recta, siempre que ésta, esté contenida en el plano.

FIGURA Nº1.

La recta h de proyecciones h'h", está contenida en el plano oblicuo α, ya que su única traza, la vertical, V" está contenida en la traza α" del plano.

Esta recta se denomina horizontal del plano, careciendo de traza horizontal, al ser paralela al plano del mismo nombre.

FIGURA Nº2.

La recta f, de proyecciones f'f", está contenida en el plano oblicuo β, ya que su única traza horizontal H' está contenida en la traza β' del plano.

Esta recta se denomina frontal de plano, careciendo de traza vertical, al ser paralela al plano del mismo nombre.

FIGURA Nº3.

Los puntos M y N no pertenecen al plano α. En el caso del punto M, su proyección M' está contenida en h', mientras que M" no está contenida en h".

El punto N, tiene su proyección N" contenida en h", mientras que N' no está contenida en h'.

El punto P pertenece al plano α, al estar sus proyecciones P' y P" contenidas en las proyecciones h' y h" de la recta h (horizontal de plano).

FIGURA Nº 4.

Los puntos A y B no pertenecen al plano α.

El punto P pertenece al plano α, al estar sus proyecciones P' y P'' contenidas en las proyecciones f' y f'' (frontal del plano).

FIGURA Nº5.

En el plano α hemos representado las rectas s y t, ambas pertenecen al plano por tener sus trazas en las trazas del plano.

Las rectas s y t pasan por los cuadrantes 2º, 1º y 4º.

Los puntos P y Q pertenecen a las rectas t y s respectivamente y ambos puntos pertenecen al plano α.

Los puntos A y B no pertenecen al plano α ya que sus proyecciones no están contenidas en ninguna recta que pertenezca al plano.

FIGURAS Nº6 Y Nº7.

En las figs. 6 y 7 hemos representado puntos que pertenecen a la vez al plano oblicuo, y a los planos bisectores. Así, en la fig. 6, el punto $B_2'B_2''$ pertenece al plano α, al tener sus proyecciones, en las proyecciones de la recta h, pertenece también al 2º plano bisector, en este caso en la zona del 2º cuadrante, al estar sobre L.T. y confundidas.

El punto $B_1'B_1''$ pertenece al plano α por tener sus proyecciones en las de la recta h, y al estar sus proyecciones a igual distancia de L.T., pertenece también al 1er plano bisector, en este caso en la zona del 1er cuadrante, al ser sus proyecciones simétricas respecto a L.T. y estar B_1' bajo L.T. y B_1'' sobre L.T.

El punto A de proyecciones A' A'', pertenece al plano α, quedando situado en el 2º cuadrante, al estar sus 2 proyecciones sobre L.T.

El caso de la figura 7 es análogo al de la fig. 6, habiéndose utilizado una frontal de plano.

En este caso el punto $B_2'B_2''$, pertenece al 2º bisector, zona del 4º cuadrante al estar sus dos proyecciones confundidas bajo L.T.

El punto C de proyecciones C'C'', pertenece al plano β, quedando situado en el 4º cuadrante al estar sus proyecciones bajo L.T.

FIGURAS Nº8 Y Nº9.

Aquí, hemos representado, en el sistema diédrico una recta t, contenida en el plano α, paralelo al L.T.

La recta t de proyecciones t't'' tiene sus trazas H'V'' contenidas en las trazas α' y α'' del plano, condición necesaria para que la recta esté contenida en el plano.

El punto P tiene sus proyecciones P' y P'' contenidas en las proyecciones t' y t'' de la recta t, contenida en el plano, por tanto el punto P está contenido en el plano α.

En la fig. 9 llegamos a la misma conclusión, habiéndose elegido una perspectiva caballera para su mejor interpretación.

FIGURAS Nº10 Y Nº11.

En las figs. 10 y 11, hemos resuelto el mismo caso, usando el plano de perfil. En cualquiera de las figs. podemos llegar a la siguiente conclusión:

1º.- El punto A pertenece al plano α por estar su proyección vertical A'' contenida en la traza vertical α'' del plano.

2º.- El punto B pertenece al plano α por estar su proyección horizontal B' contenida en la traza horizontal α' del plano.

3º.- El punto C pertenece a L.T. no perteneciendo al plano α, ya que ninguna de sus proyecciones C' o C'' están contenidas en las trazas del plano α.

4º.- El punto P pertenece al plano α, ya que sus proyecciones P' y P'' están contenidas en las proyecciones t' y t'' de la recta t contenida en el plano α.

FIGURA Nº 12 Y Nº13.

En el caso de la recta t al estar contenida en el plano α proyectante horizontal, su proyección horizontal coincidirá con la traza horizontal del plano.

La proyección vertical t" de la recta podrá formar cualquier ángulo con la L.T.

En un punto tal como el P, su proyección horizontal deberá estar contenida en la traza horizontal del plano, y su proyección vertical en cualquier punto de las distintas posiciones que ocupe la proyección vertical de la recta.

FIGURA Nº14.

Representación de una recta horizontal, contenida en un plano proyectante horizontal.

En la fig. 14 podemos observar que la proyección horizontal de la recta coincide con la traza horizontal del plano, y la proyección vertical de la recta es paralela al plano horizontal.

FIGURA Nº15.

En esta fig. hemos representado los puntos M, P, Q y A.

Los puntos P, M y A pertenecen al plano α, por tener sus proyecciones horizontales contenidas en la proyección horizontal t' de la recta t.

El punto Q está detrás del plano y por tanto no pertenece a él.

FIGURAS Nº16 Y Nº17.

El punto P está contenido en el plano oblicuo α por tener sus proyecciones P' y P" contenidas en las proyecciones t' y t" de la recta t contenida en el plano.

FIGURA Nº18.

En el plano α que pasa por L.T. y determinado por el punto M, los puntos A y C no pertenecen al plano, ya que sus proyecciones A'" y C'" no pertenecen a la traza α'" del plano a.

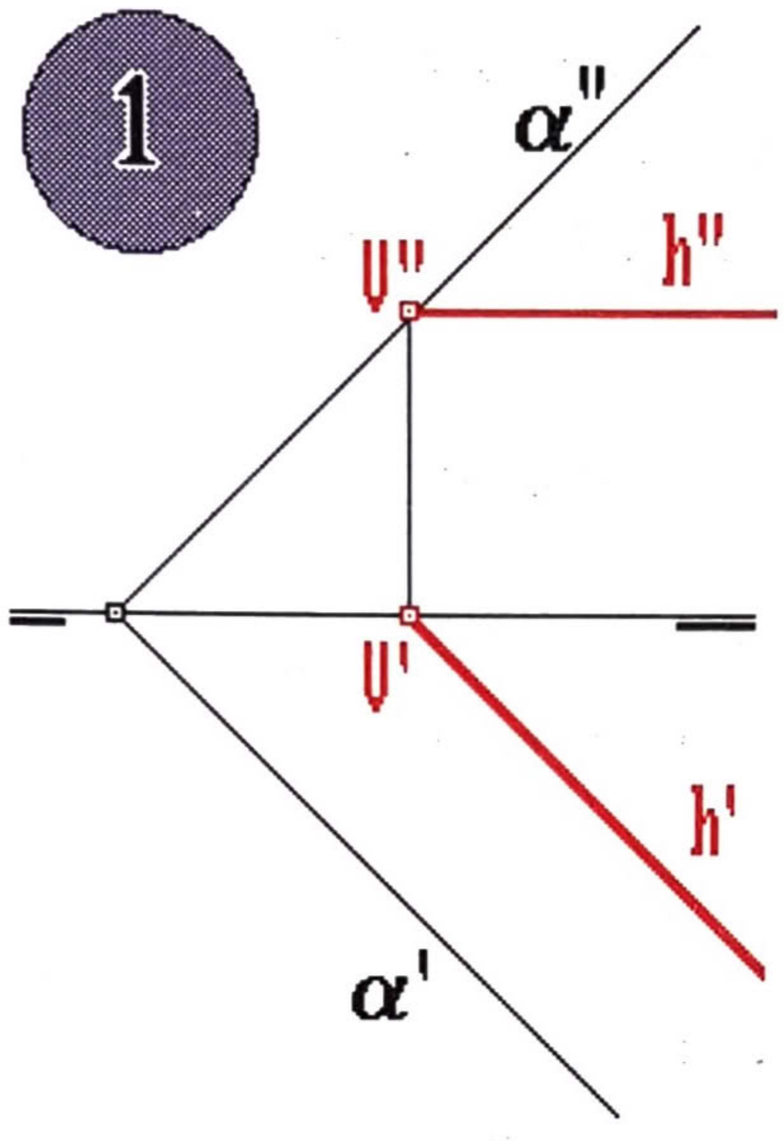
El punto P, al cumplir esta condición, sí pertenece al plano.

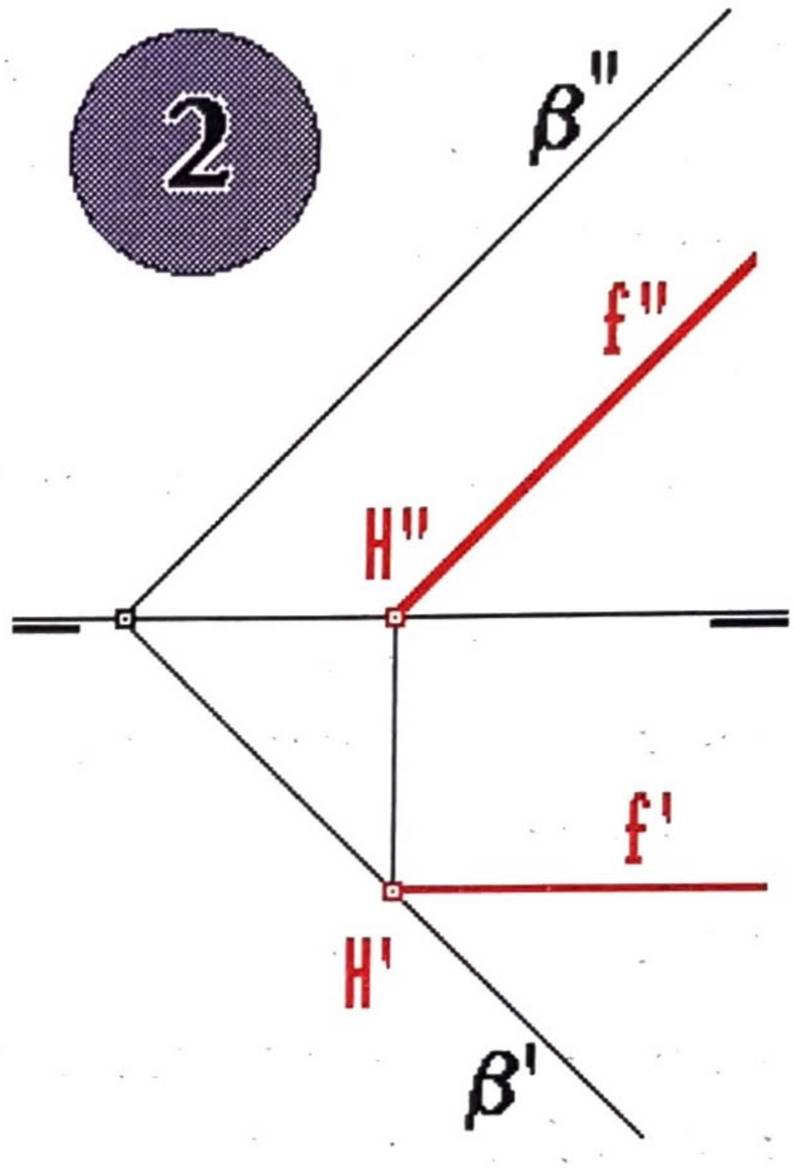
EJERCICIO Nº1 (FIG. Nº19)

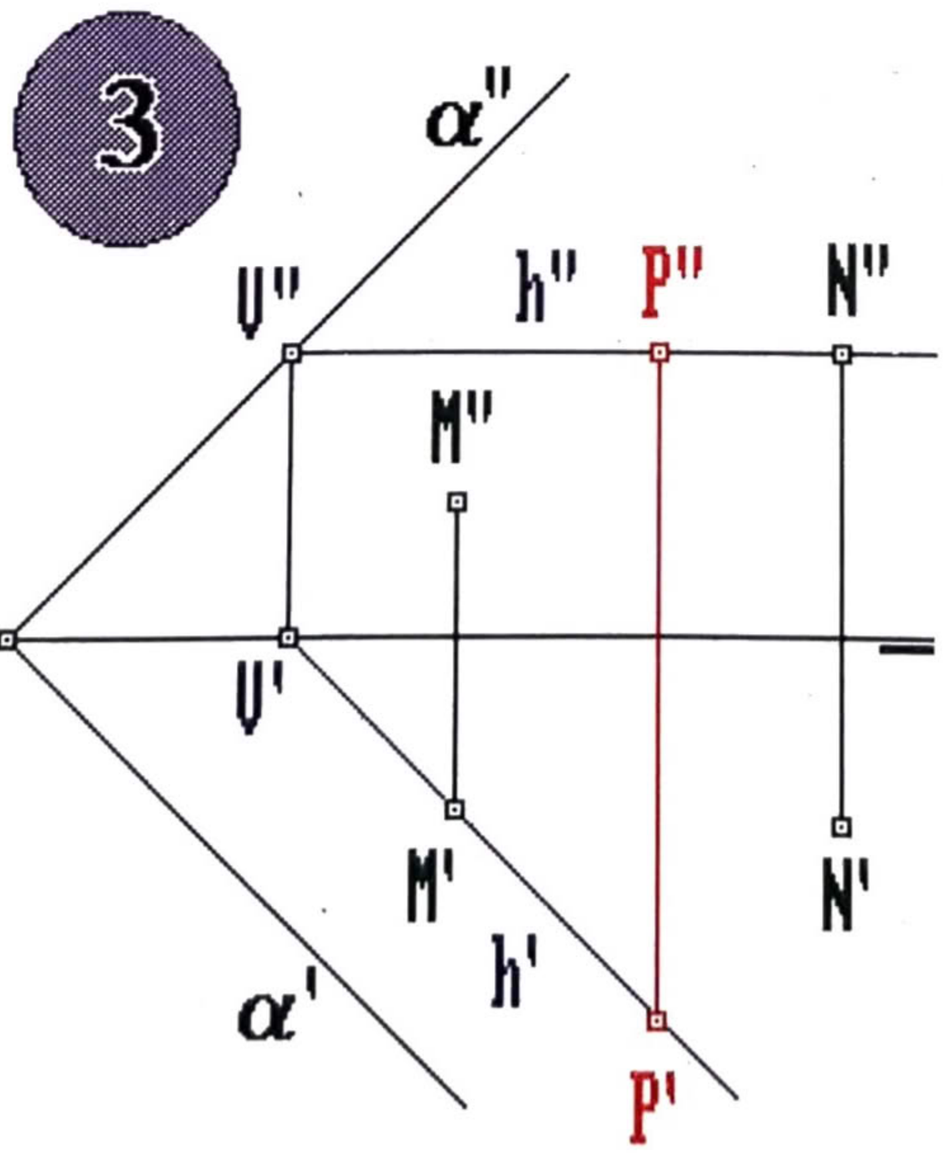
Encontrar la proyección P" del punto P para que pertenezca al plano α, conociendo sus trazas en la zona del 3er cuadrante.

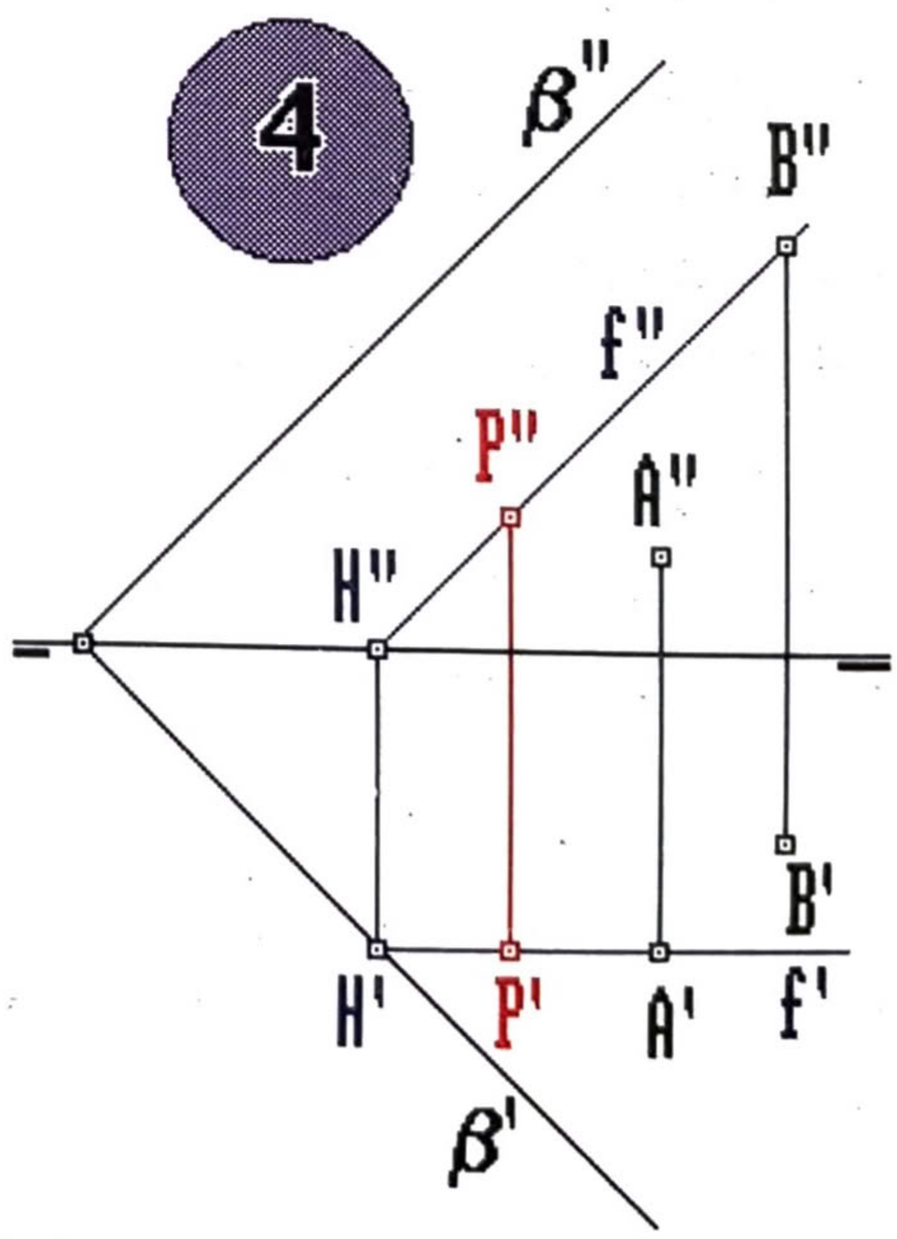
EJERCICIO Nº2 (FIG. Nº20)

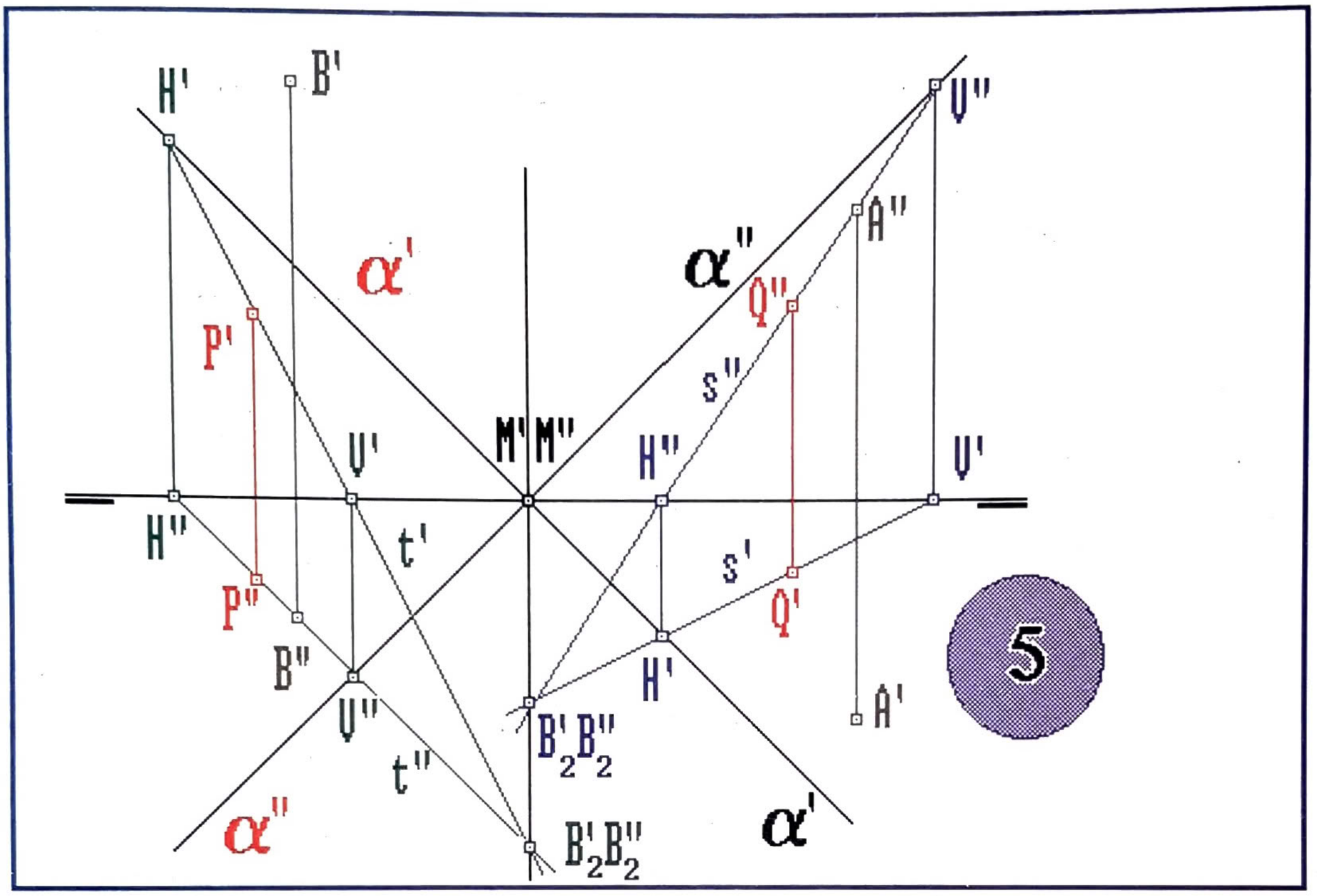
Encontrar las proyecciones de los puntos: B, que pertenezca al plano α. C, que pertenezca a los planos α y primer bisector, y las de una recta t contenida en el plano α.

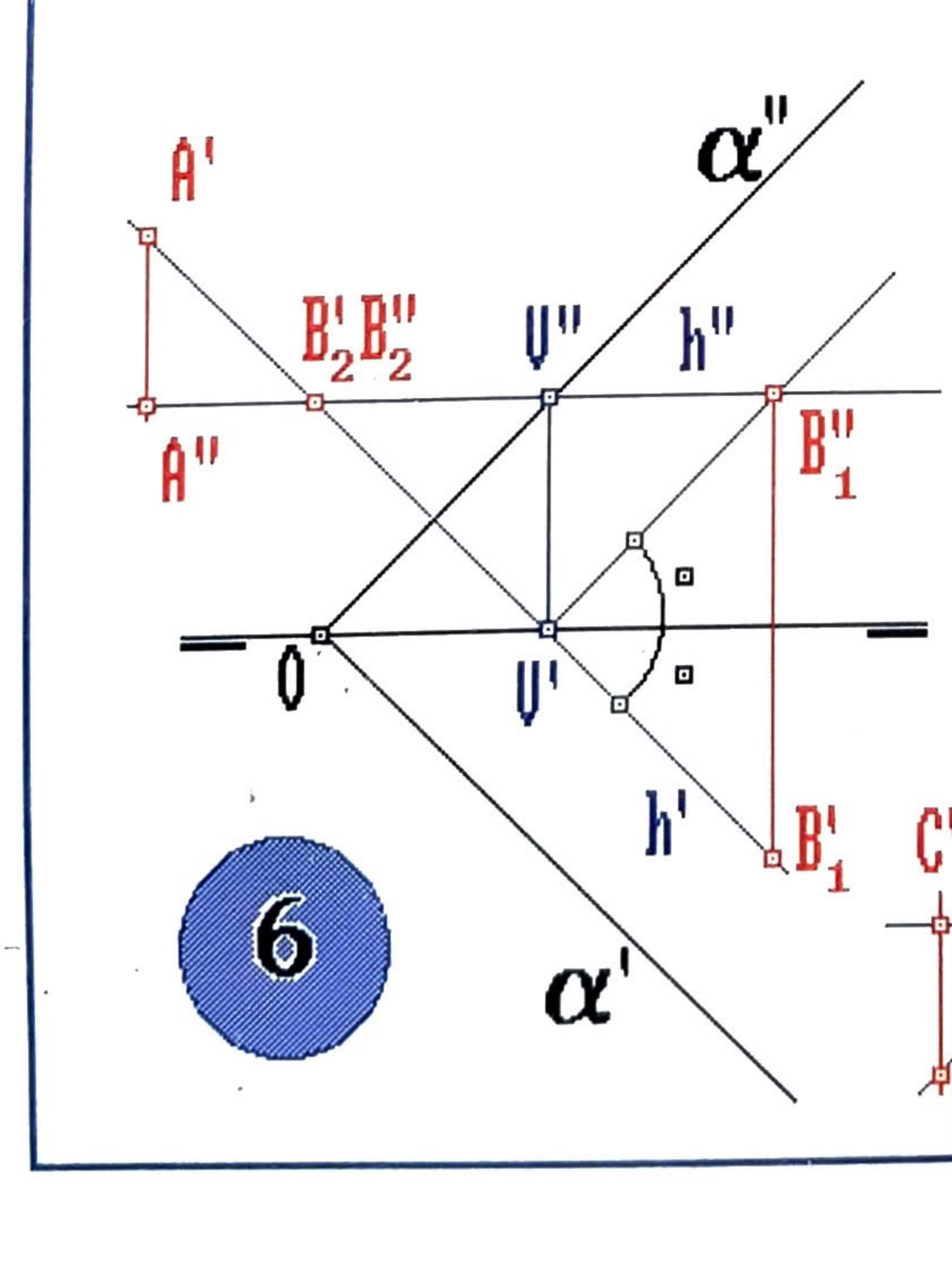

1
α"
V"
h"
V'
h'
α'

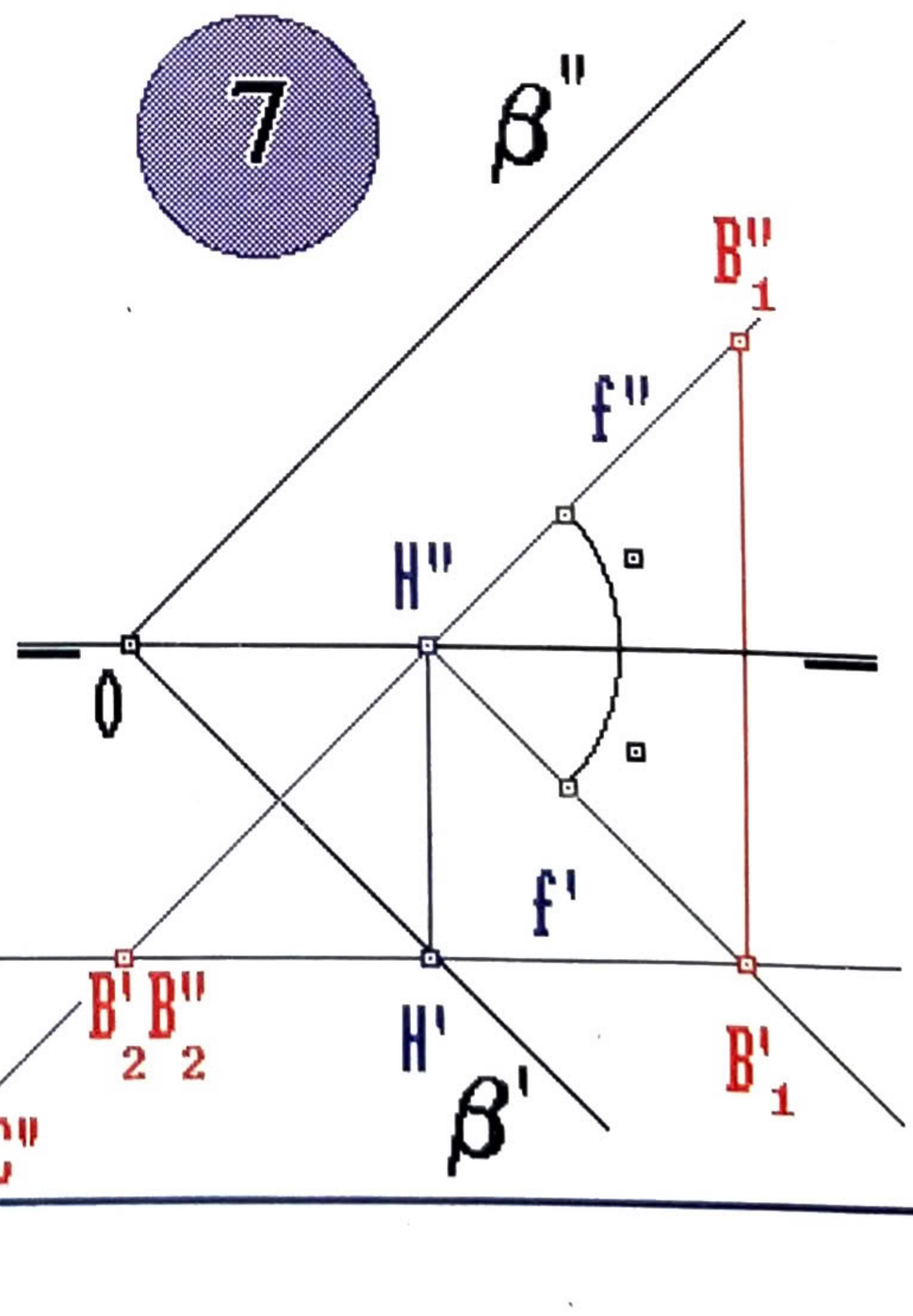

2
β"
f"
H"
f'
H'
β'

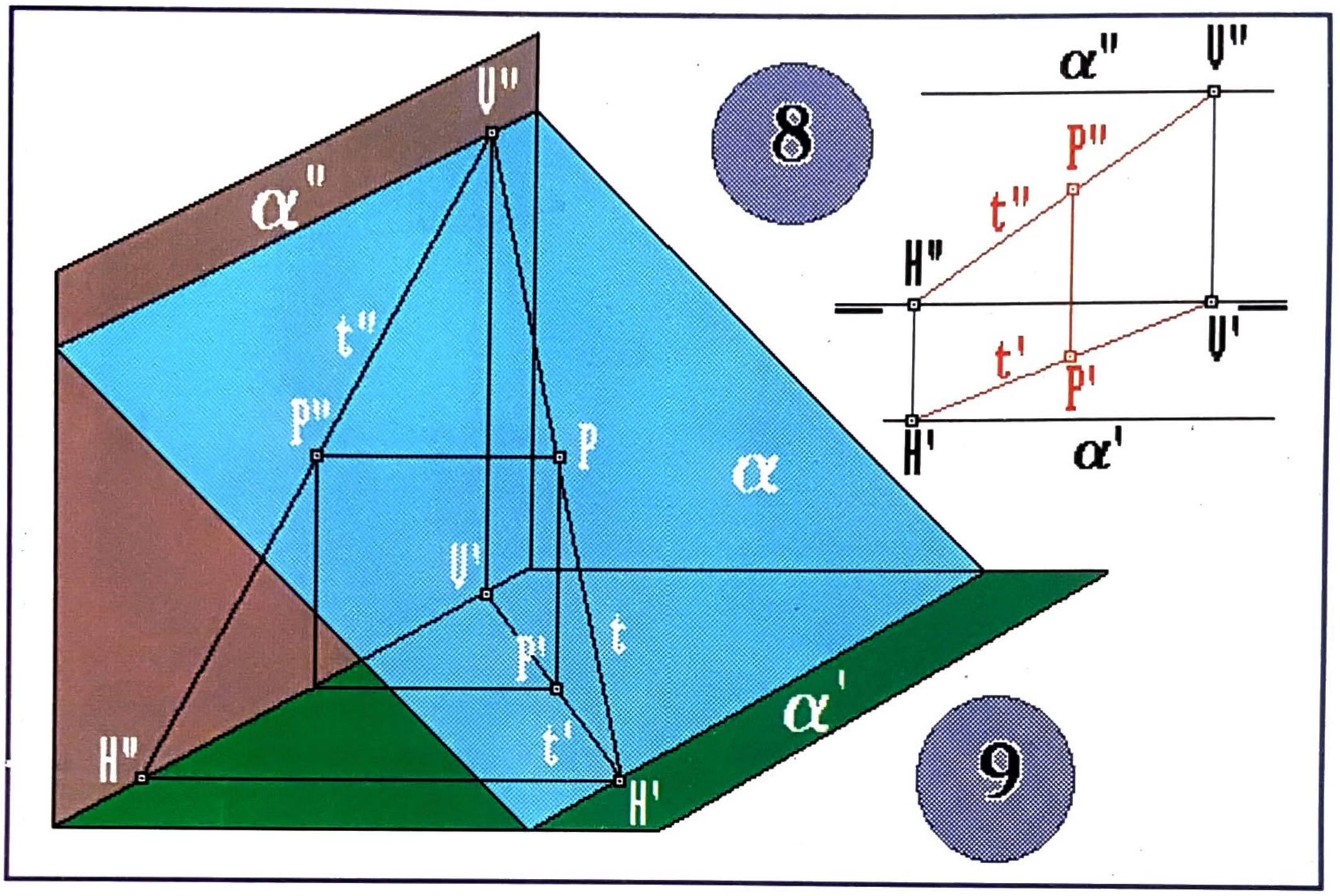

3
α"
V"
h"
P"
N"
M"
V'
M'
h'
N'
α'
P'

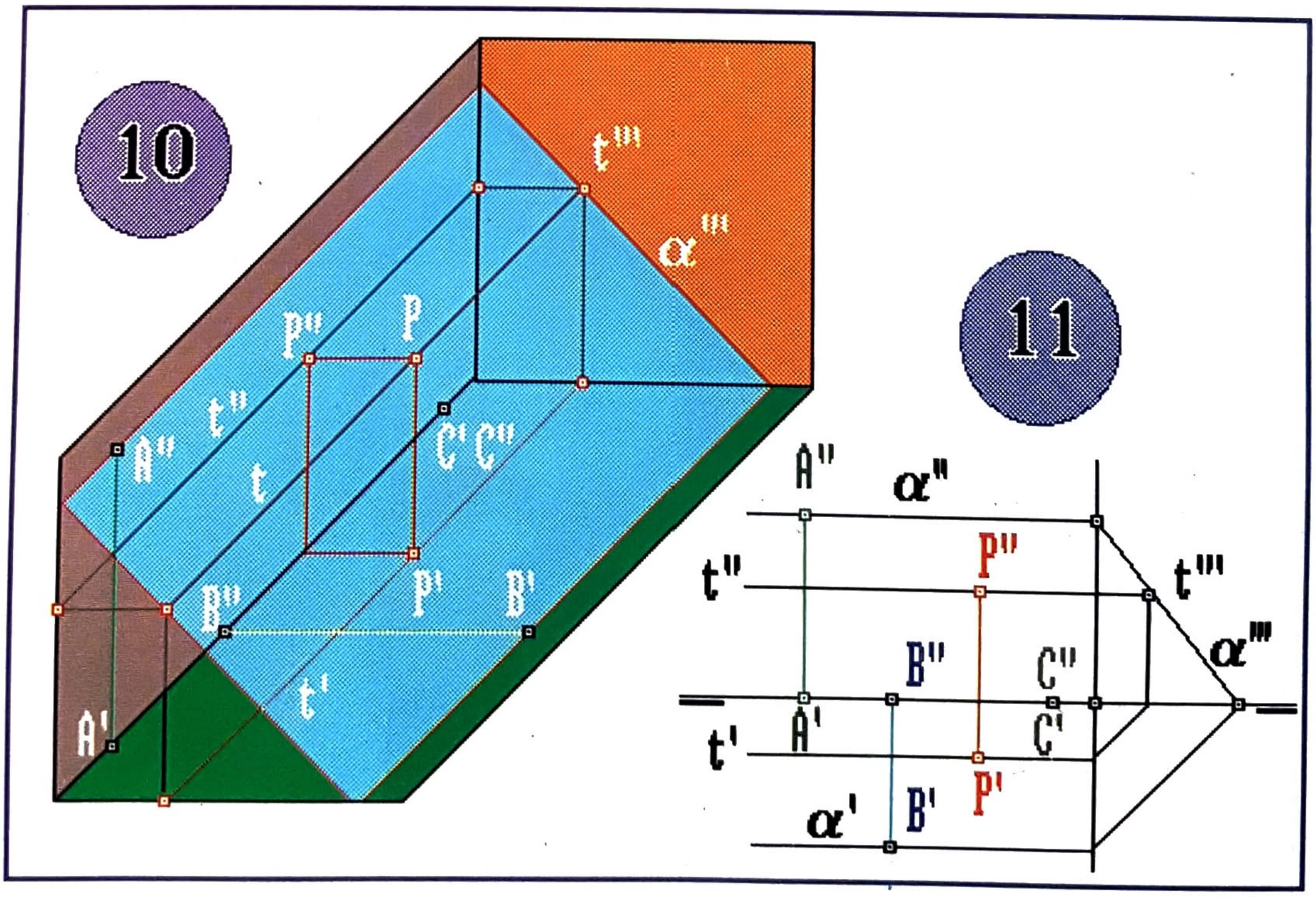

4
β"
B"
f"
P"
A"
H"
B'
H'
P'
A'
f'
β'

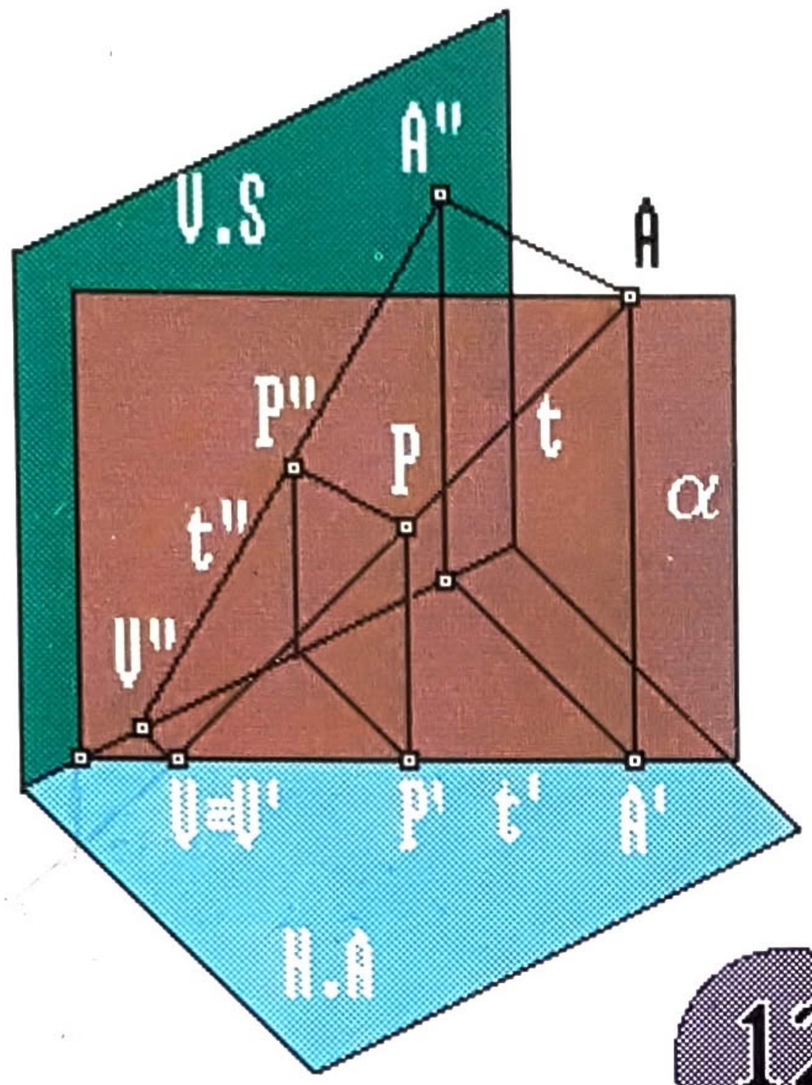

H'
B'
V''
α'
α''
A''
Q''
P'
s''
M'M''
H''
V'
V'
t'
s'
H''
P''
Q'
B''
H'
A'
V''
B'2B''2
t''
α''
B'2B''2
α'
5


A'
α''
B'2B''2
V''
h''
B''1
A''
0
V'
h'
B'1
6
α'

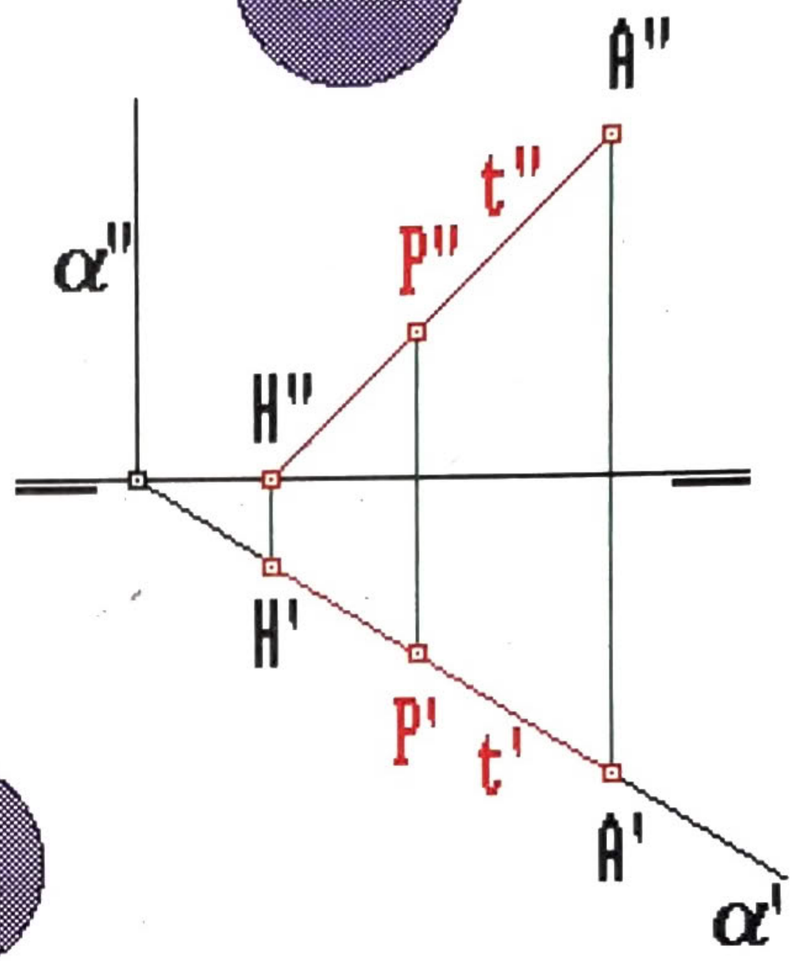

7
β''
B''1
f''
H''
0
C'
f'
B'2B''2
H'
B'1
C''
β'


8
α"
V"
P"
t"
H"
V'
t'
P'
H'
α'
V"
α"
t"
P"
H"
P
α
V'
t
P'
α'
t'
H"
H'
9


10
t'''
α'''
P"
P
A"
t"
t
C' C"
B"
P'
B'
t'
A'
11
A"
α"
t"
P"
t'''
α'''
B"
C"
A'
C'
t'
P'
α'
B'

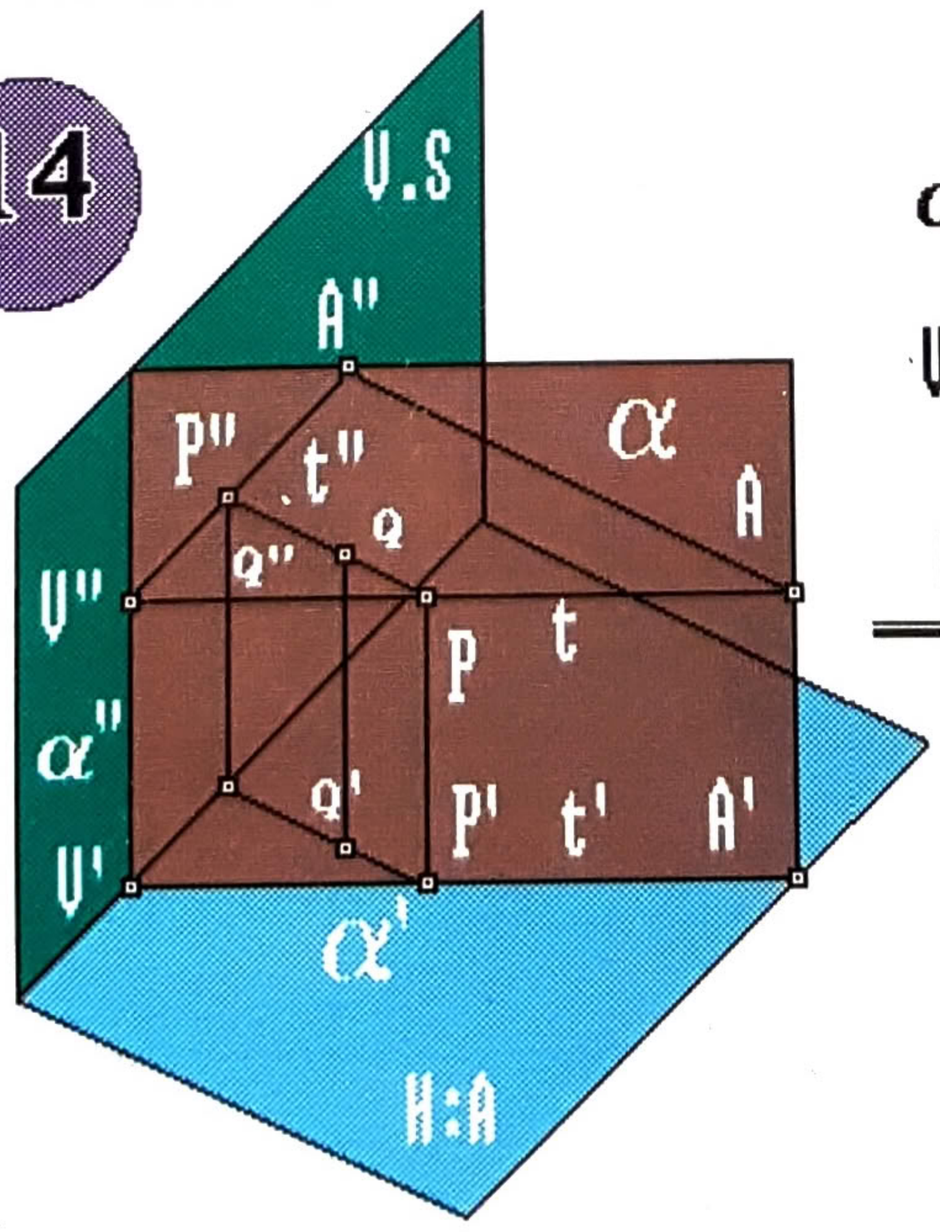

V.S
A''
A
P''
P
t
t''
α
V''
V=V'
P'
t'
A'
H.A

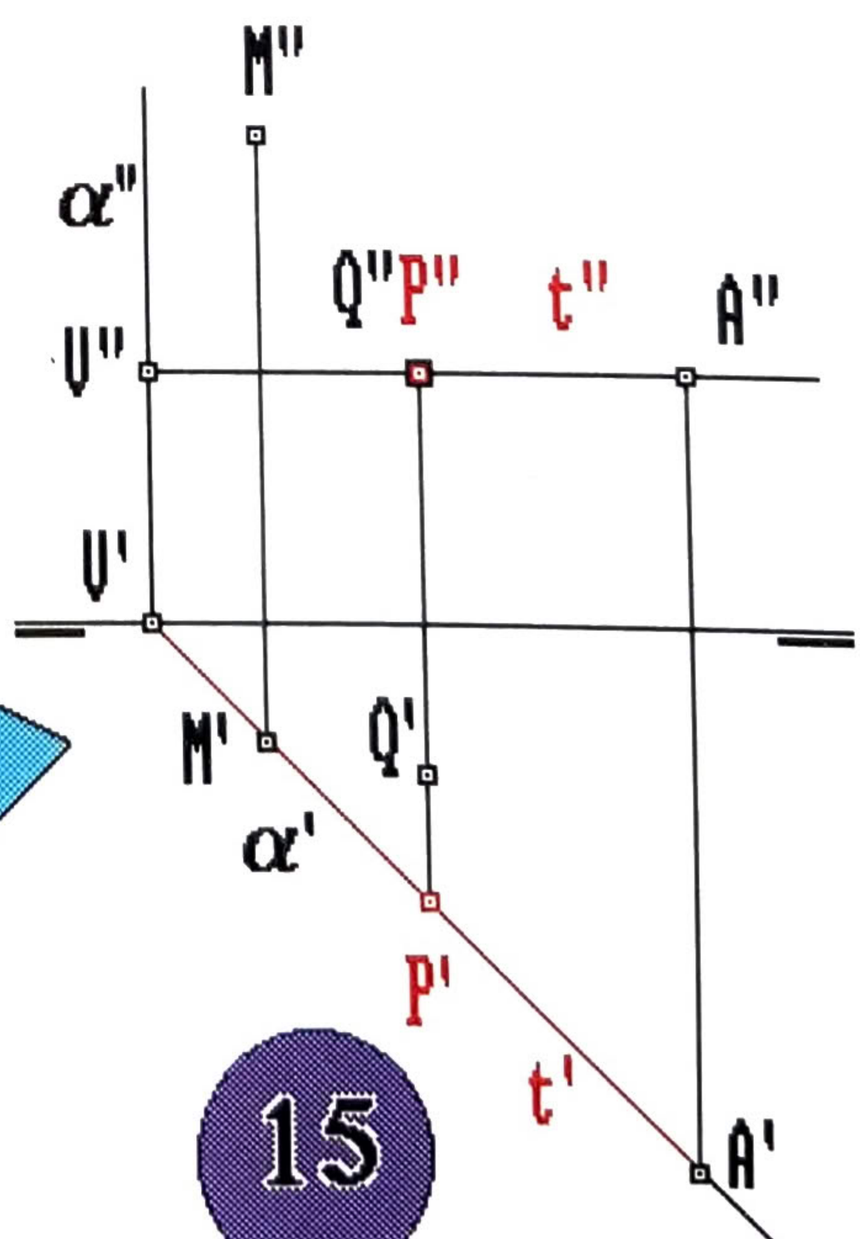
13


α''
A''
P''
t''
H''
H'
P'
t'
A'
α'

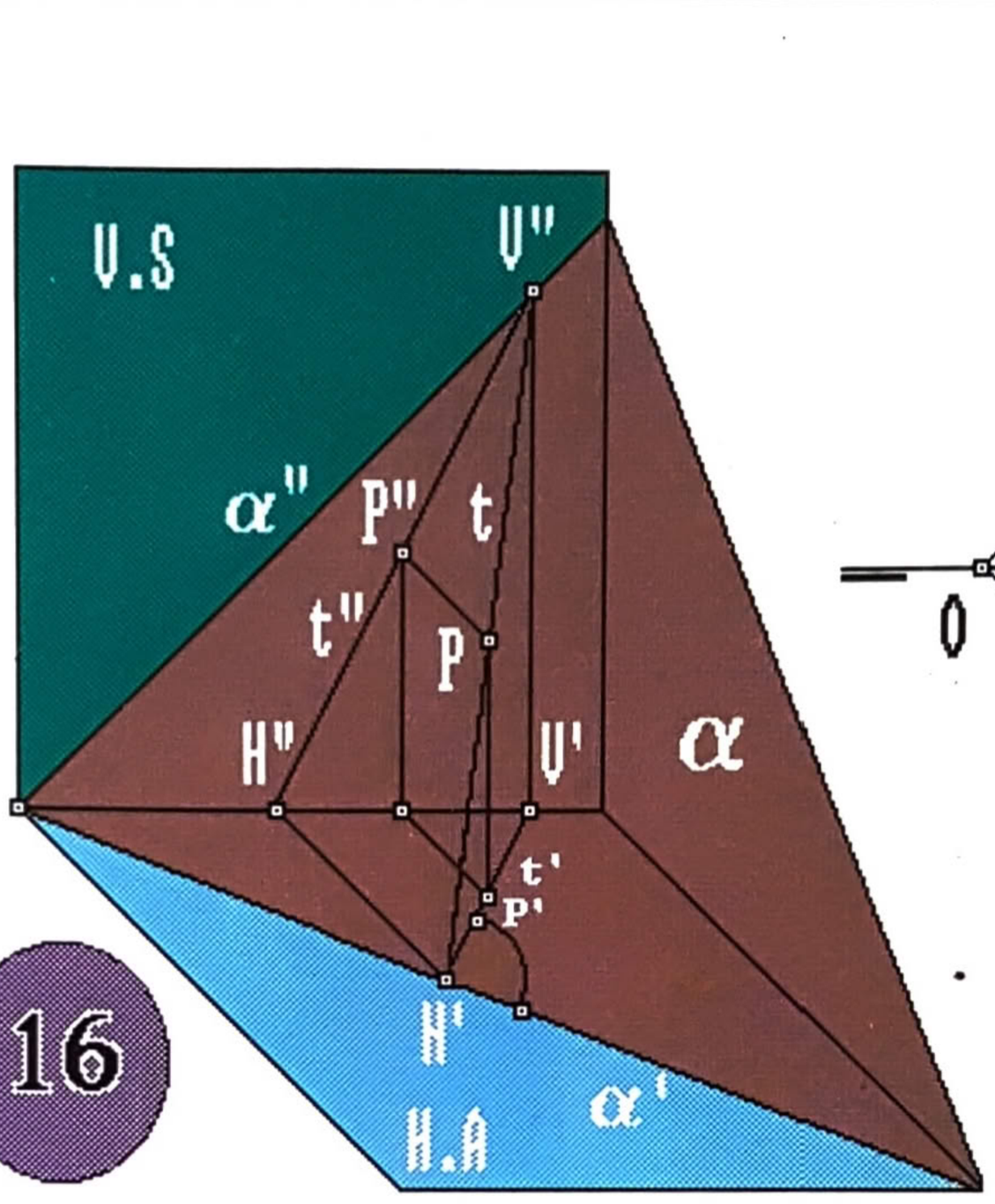
12

14

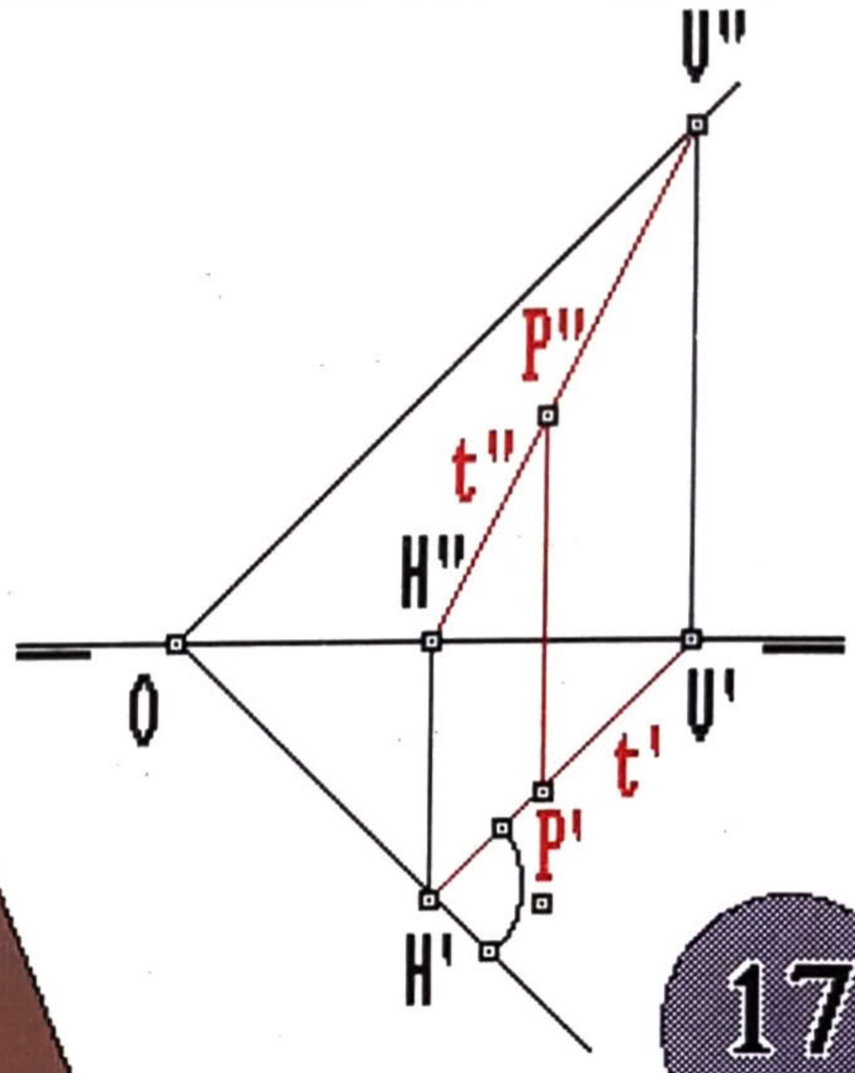

V.S
A''
P''
t''
α
A
Q
Q''
V''
P
t
α''
Q'
P'
t'
A'
V'
α'
H:A


M''
α''
Q''P''
t''
A''
V''
V'
M'
Q'
α'
P'
t'
A'

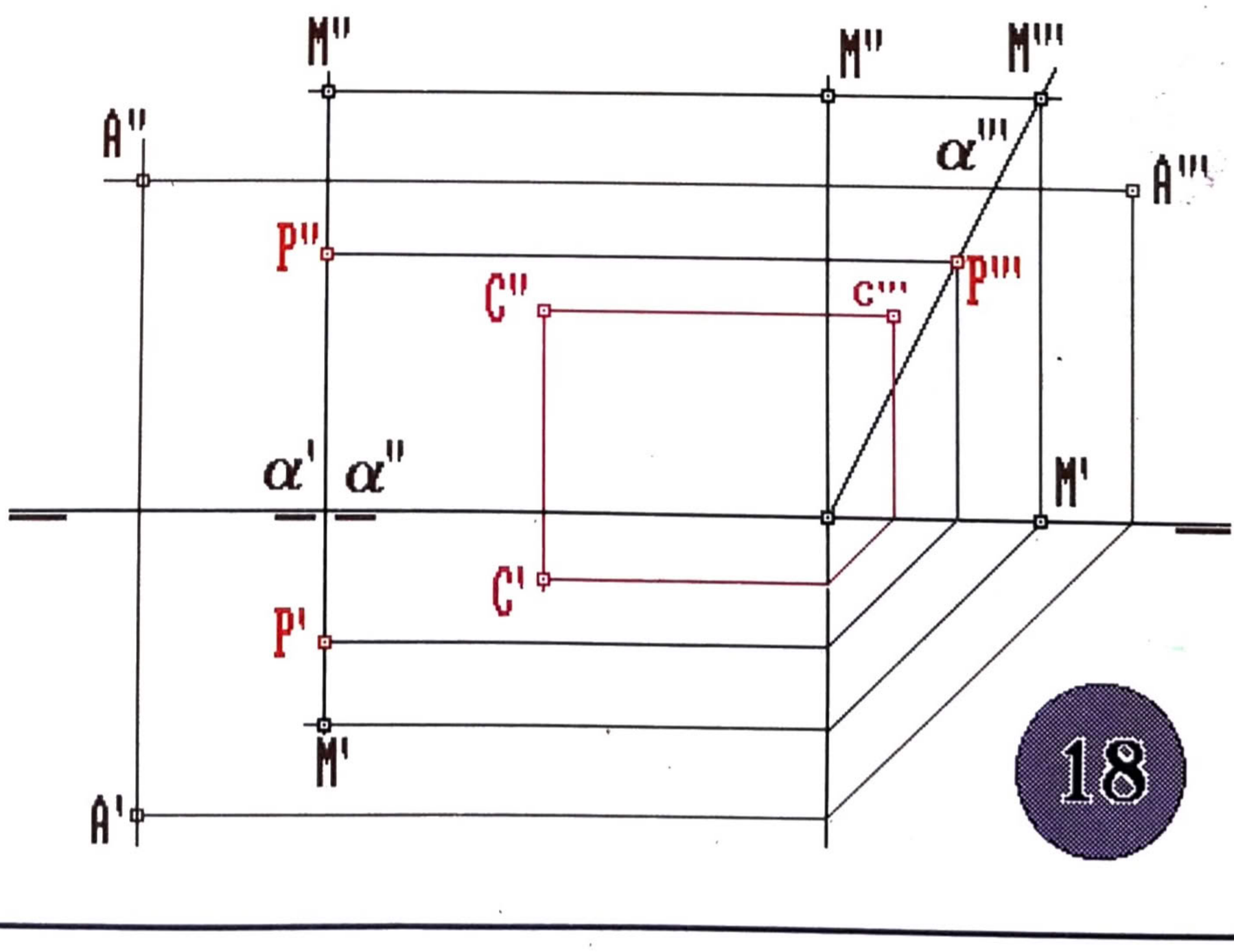
15



16

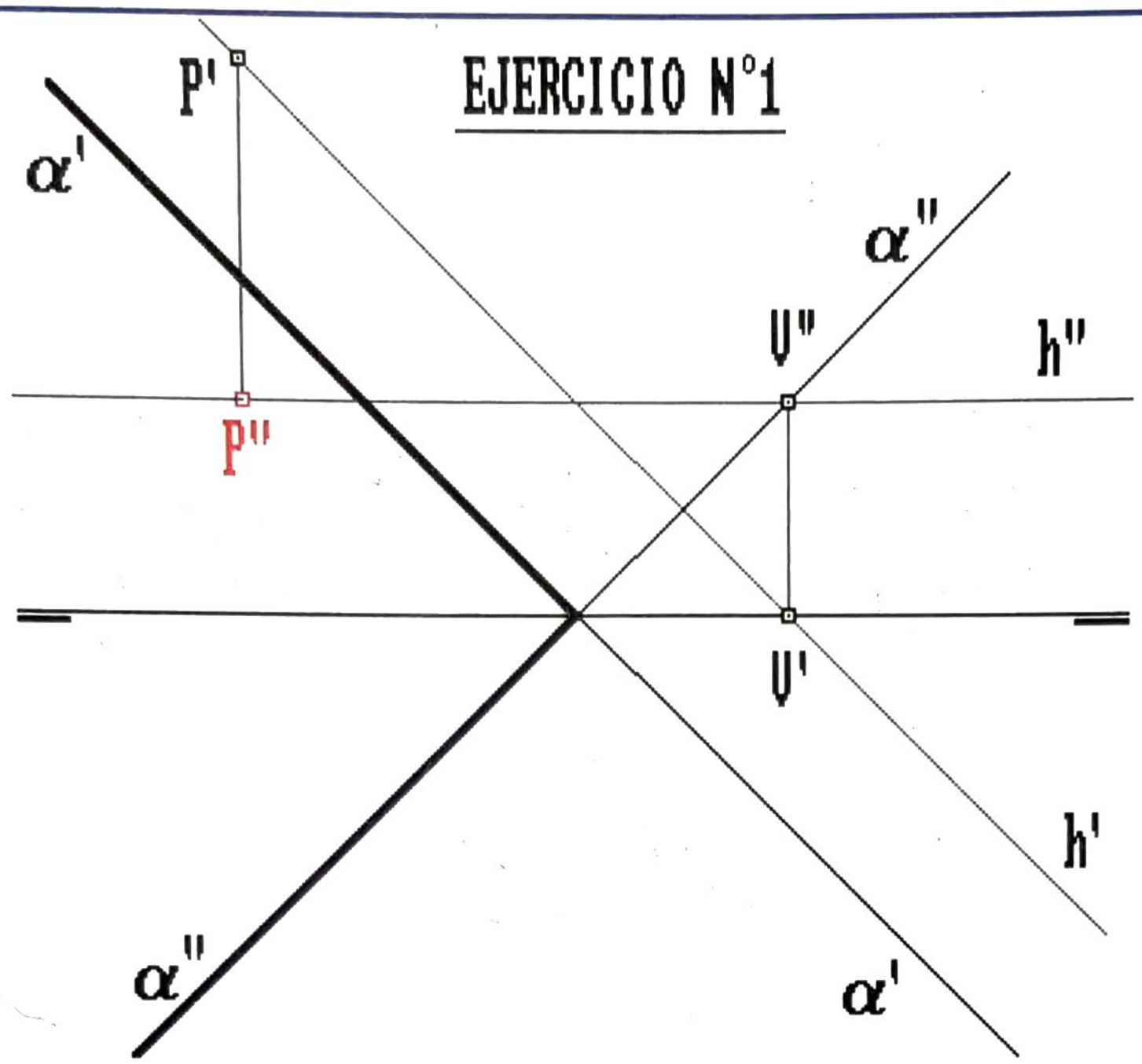


17



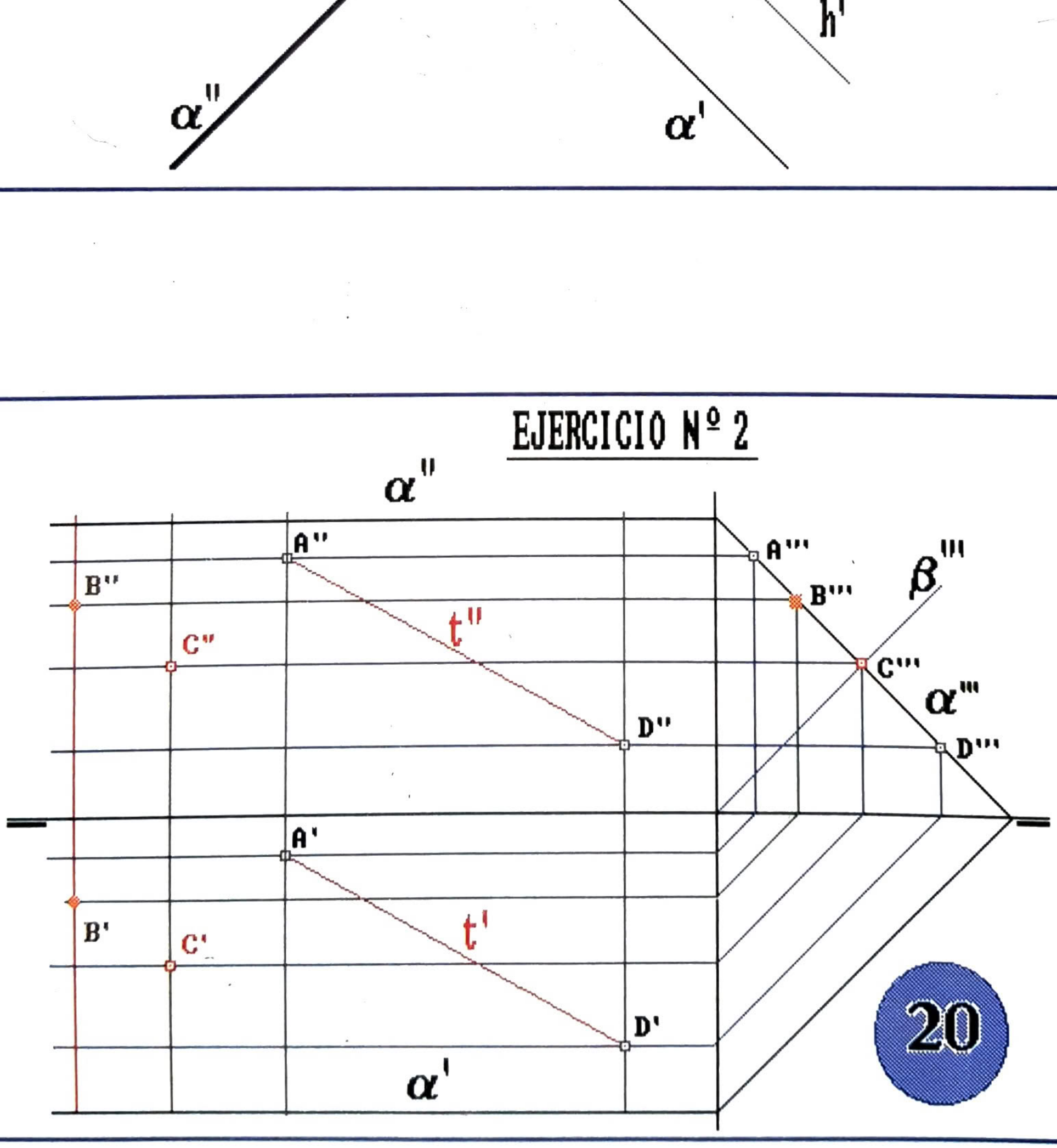
18

EJERCICIO N°1



19

EJERCICIO Nº 2



20

Intersección de planos.

INTERSECCION DE PLANOS

a.- La intersección de dos planos es una recta.

b.- La recta intersección de dos planos quedará definida cuando se conozcan dos puntos comunes a ambos planos.

c.- La intersección entre tres planos será, un punto; por ser la intersección de dos de ellos (como hemos dicho antes), una recta, cuya intersección con un tercer plano es un punto.

d.- Como norma general, para determinar la intersección de dos planos hemos de cortar a ambos por un tercer plano, y determinar la intersección de éste con cada uno de los planos dados.

e.- Consideramos más conveniente, utilizar como tercer plano (plano auxiliar) los planos de proyección, horizontal y vertical; o en su defecto, planos paralelos a éllos.

En la fig. 1 los planos α y β al ser cortados por un tercer plano y nos determinarán dos rectas contenidas en dicho plano ψ, con un punto de intersección A.

Siguiendo el mismo procedimiento, al ser cortados los planos dados, por el plano auxiliar π obtenemos en éste otro punto de intersección B, que unido con el anterior nos determinará la recta i intersección entre los planos α y β.

En la fig. 2 podemos observar los planos oblicuos α y β.
La intersección de ambos es la recta i limitada por los puntos V'' y H' (puntos de intersección de las trazas homónimas de los planos α y β).

INTERSECCION DE RECTA Y PLANO

Este problema lo resolveremos haciendo pasar por la recta un plano (preferentemente proyectante).

INTERSECCION DE DOS PLANOS OBLICUOS

En la fig. 3 los planos α y β tienen sus trazas verticales confundidas en el punto V y las horizontales en el H.

Uniendo V"H" y V'H' obtendremos las proyecciones i" e i' de la recta intersección entre ambos planos.

INTERSECCION ENTRE UN PLANO OBLICUO Y OTRO PROYECTANTE

En la fig. 4 los planos α y β, son oblicuos y proyectante horizontal respectivamente.

Para obtener su intersección uniremos V"H" y V'H', dándonos las proyecciones de la recta i, común a ambos planos, es decir, la intersección entre los planos α y β.

En la fig. 5 hemos obtenido la intersección, entre los planos oblicuos α y β, por el mismo procedimiento seguido en las figs. 3 y 4.

INTERSECCION ENTRE PLANOS PROYECTANTES

En la fig. 6 hemos resuelto el caso de la intersección entre dos planos proyectantes horizontales.

Su intersección es la recta i, perpendicular al plano horizontal y su proyección vertical paralela a las trazas verticales de ambos planos.

En el caso de la fig. 7 los planos son proyectantes verticales, siendo su intersección una recta cuya proyección vertical es un punto, y su proyección horizontal, es una recta paralela a las proyecciones horizontales de las trazas de los planos.

INTERSECCION ENTRE UN PLANO OBLICUO Y OTRO PARALELO AL HORIZONTAL. (fig. 8)

La intersección entre el plano oblicuo α y el plano paralelo al horizontal β es la recta i.

Su proyección vertical i" coincide con la traza vertical β" del plano β, y la proyección horizontal pasa por V' siendo paralela a α', traza horizontal del plano α.

El punto P, cuyas proyecciones son P' y P", pertenece al plano α, β y al 2º plano bisector.

NOTA: En la fig. 12 hemos resuelto el caso de la intersección entre un plano oblicuo α, con otro paralelo al plano vertical.

INTERSECCION DE DOS PLANOS OBLICUOS, CUANDO SUS TRAZAS VERTICALES U HORIZONTALES SON PARALELAS ENTRE SI

En las figs. 9 y 10 hemos resuelto el caso de dos planos oblicuos, cuyas trazas verticales son paralelas entre sí.

En la fig. 9 cortamos a los planos α y β por un plano paralelo al vertical, que pase por la proyección P' del punto P (intersección de las trazas horizontales de los planos α y β).

Este plano nos produce una frontal de ambos planos f'f'' recta intersección entre α y β. (recta i).

INTERSECCION ENTRE UN PLANO OBLICUO Y OTRO PERPENDICULAR AL 2º BISECTOR

En la fig. 11 tenemos el plano oblicuo α, y el plano β perpendicular al 2º bisector.

Los planos α y β tienen un punto común (A) en L.T. Para obtener un 2º punto que pertenezca a la intersección trazaremos una horizontal de ambos planos, para obtener un punto P que pertenezca a la vez al plano α y al β.

La unión de las proyecciones P'A' y P''A'' nos darán las proyeccciones i' e i'' de la recta intersección de los planos α y β.

INTERSECCION ENTRE UN PLANO OBLICUO Y OTRO PERPENDICULAR AL 2º BISECTOR

En la fig. 13, la recta intersección es la i, el problema se resuelve como en el caso general, es decir, uniéndose las proyecciones V''H'' nos dará i'' y la unión V' H' nos dará i' (proyecciones de la recta i, intersección de los planos α y β).

INTERSECCION DE UN PLANO PARALELO A L.T. Y OTRO QUE PASA POR ELLA

En la fig. 14 hemos recurrido a la proyección sobre el plano de perfil.

En dicha proyección el plano β que pasa por L.T. y el punto P de proyecciones P'P'', queda perfectamente definido, así como el plano α paralelo a L.T. y cuyas trazas son α' y α''.

Ambos planos se cortarán en i'''.

Las proyecciones de la recta i intersección entre ambos planos es i' i''.

Un punto tal como el Q pertenece tanto al plano α como al plano β por pertenecer a la recta i, intersección de ambos planos.

INTERSECCION ENTRE UN PLANO OBLICUO Y UN PLANO PROYECTANTE VERTICAL
(fig. 15)

Este caso es similar al de la fig. 4, no obstante, creemos conveniente resolverlo conociendo sólo la traza vertical del plano proyectante y por tanto desconociendo la intersección de las trazas de ambos planos.

La forma utilizada para la resolución de este problema es la siguiente:

Cortamos a los planos α y β, por los planos π y ψ dándonos las horizontales de ambos planos m, n, s y t.

Los puntos P y Q pertenecen tanto al plano α, como al plano β.

Unidas ordenadamente las proyecciones P'Q' y P''Q'' nos darán las proyecciones i' e i'' (proyecciones de la recta intersección entre los planos α y β).

INTERSECCION ENTRE DOS PLANO OBLICUOS CUANDO SUS TRAZAS SE ENCUENTRAN FUERA DE LOS LIMITES DEL DIBUJO
(fig. 16)

Lo resolveremos por el mismo procedimiento que el anterior, para obtener los puntos A y B que pertenezcan a ambos planos.

(En nuestro caso hemos utilizado horizontales de plano, pero se podrían haber usado frontales de plano).

INTERSECCION DE TRES PLANOS

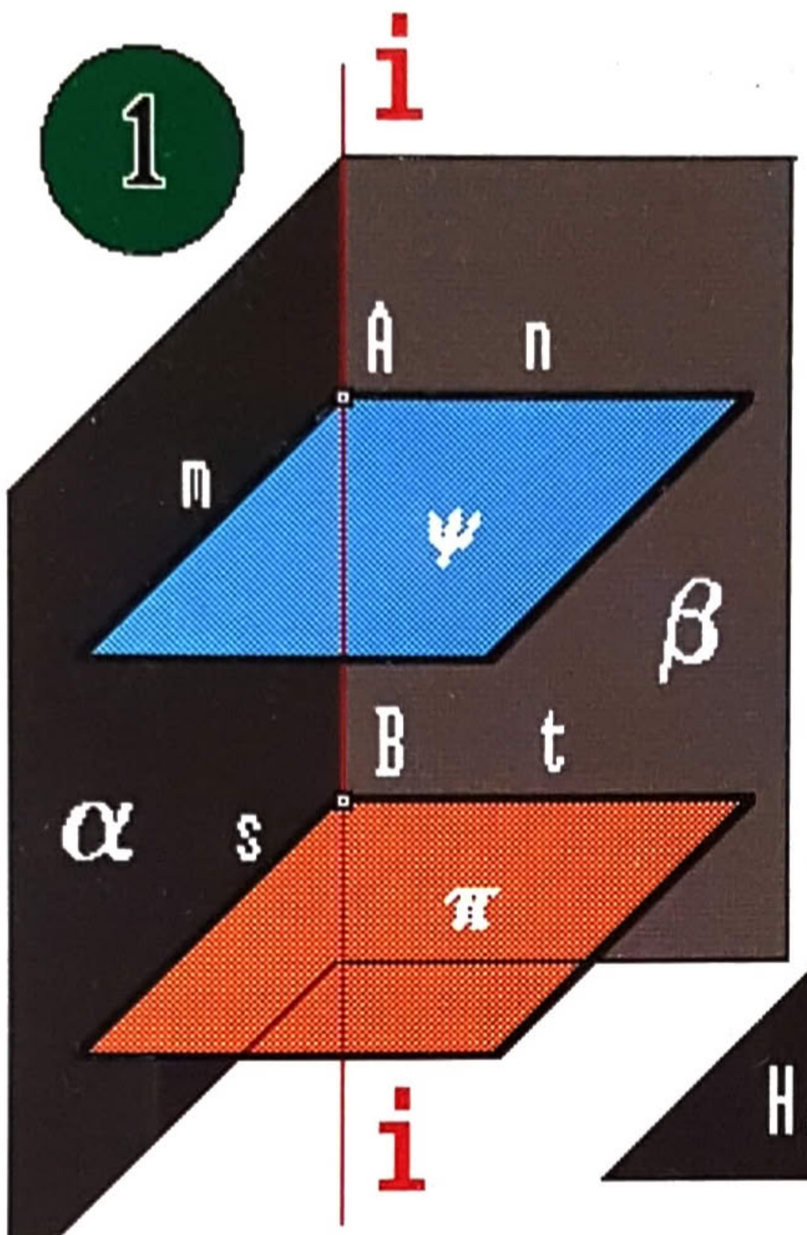
En la fig. 17 hemos resuelto el caso de la intersección de 3 planos, en este caso α, β y π.

Por el procedimiento conocido hallamos la intersección entre 2 de ellos (α y β) que nos dará la recta i.

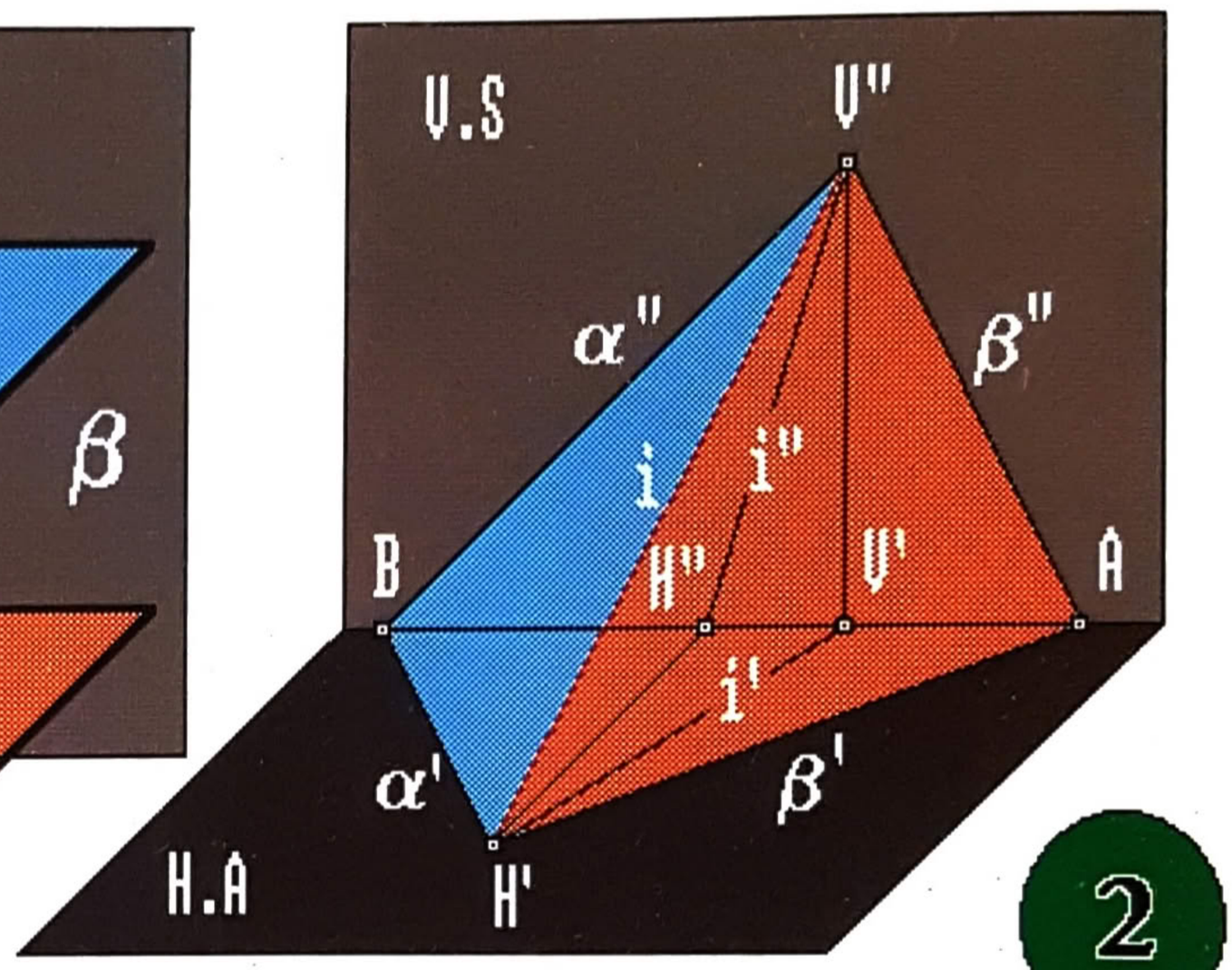
A continuación, por la recta i hacemos pasar un plano auxiliar ω.

Este nuevo plano cortará a π según una nueva recta. El punto común de ambas rectas P será el punto de intersección de los tres planos.

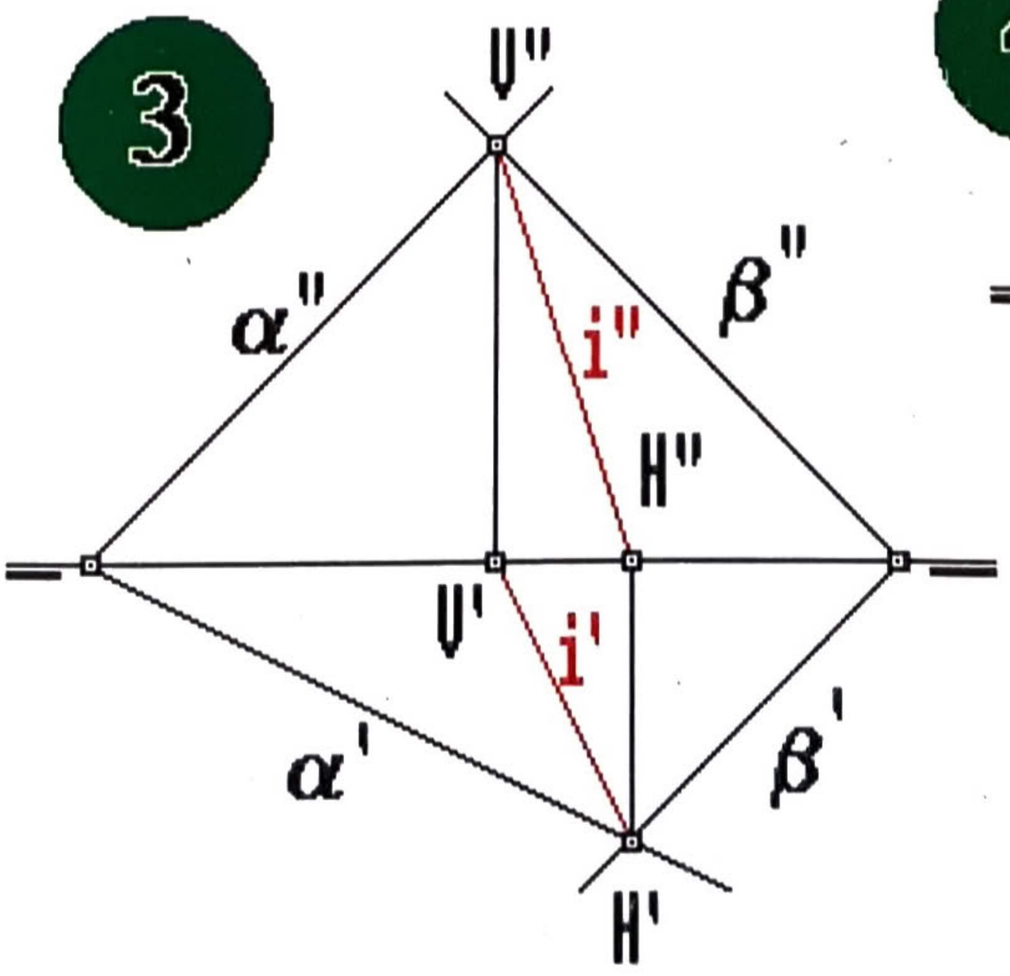
1


i
A
n
m
ψ
β
B
t
α
s
π
i

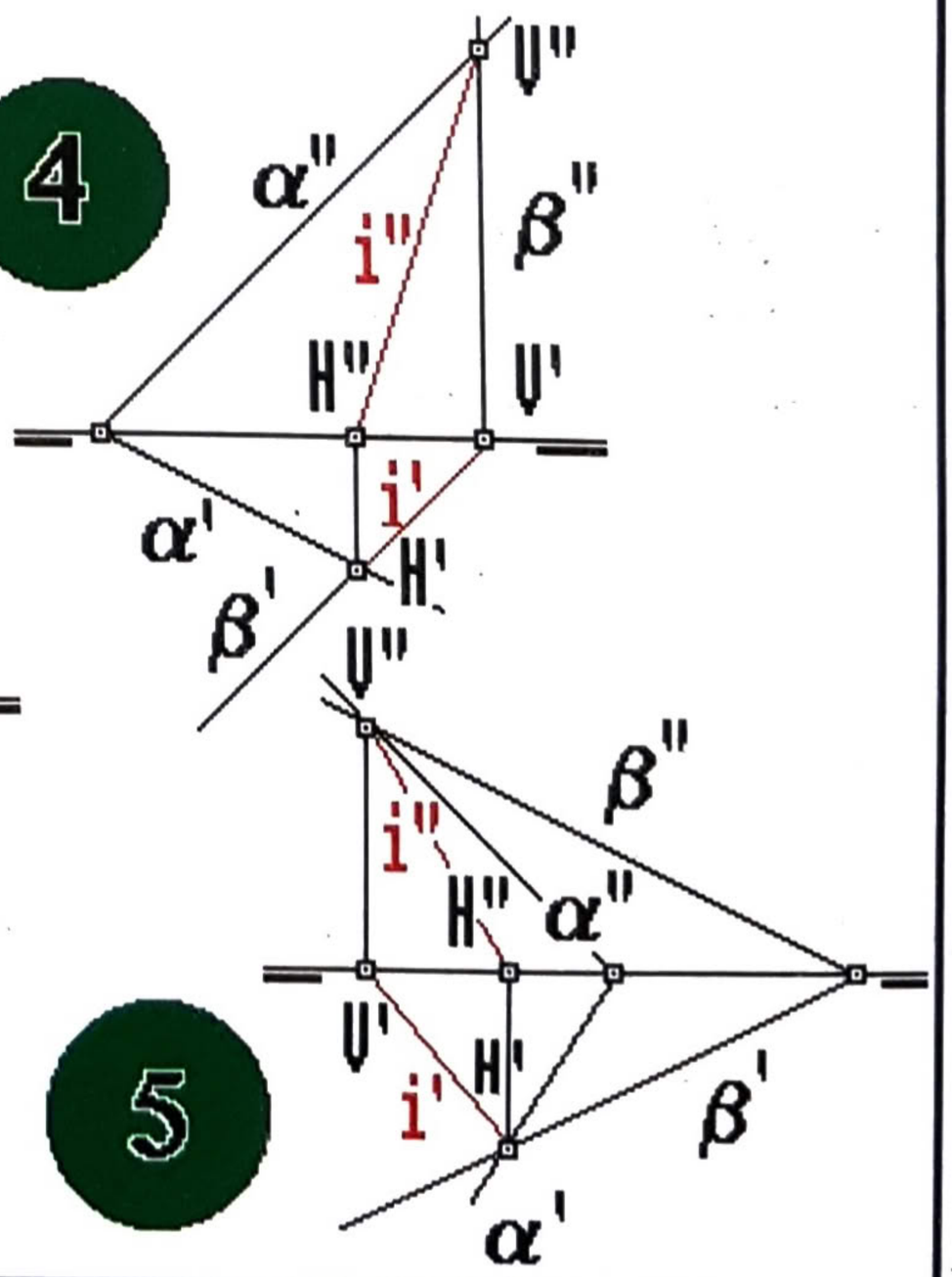
2


V.S
V"
α"
β"
i
i"
B
H"
V'
A
i'
α'
β'
H.A
H'

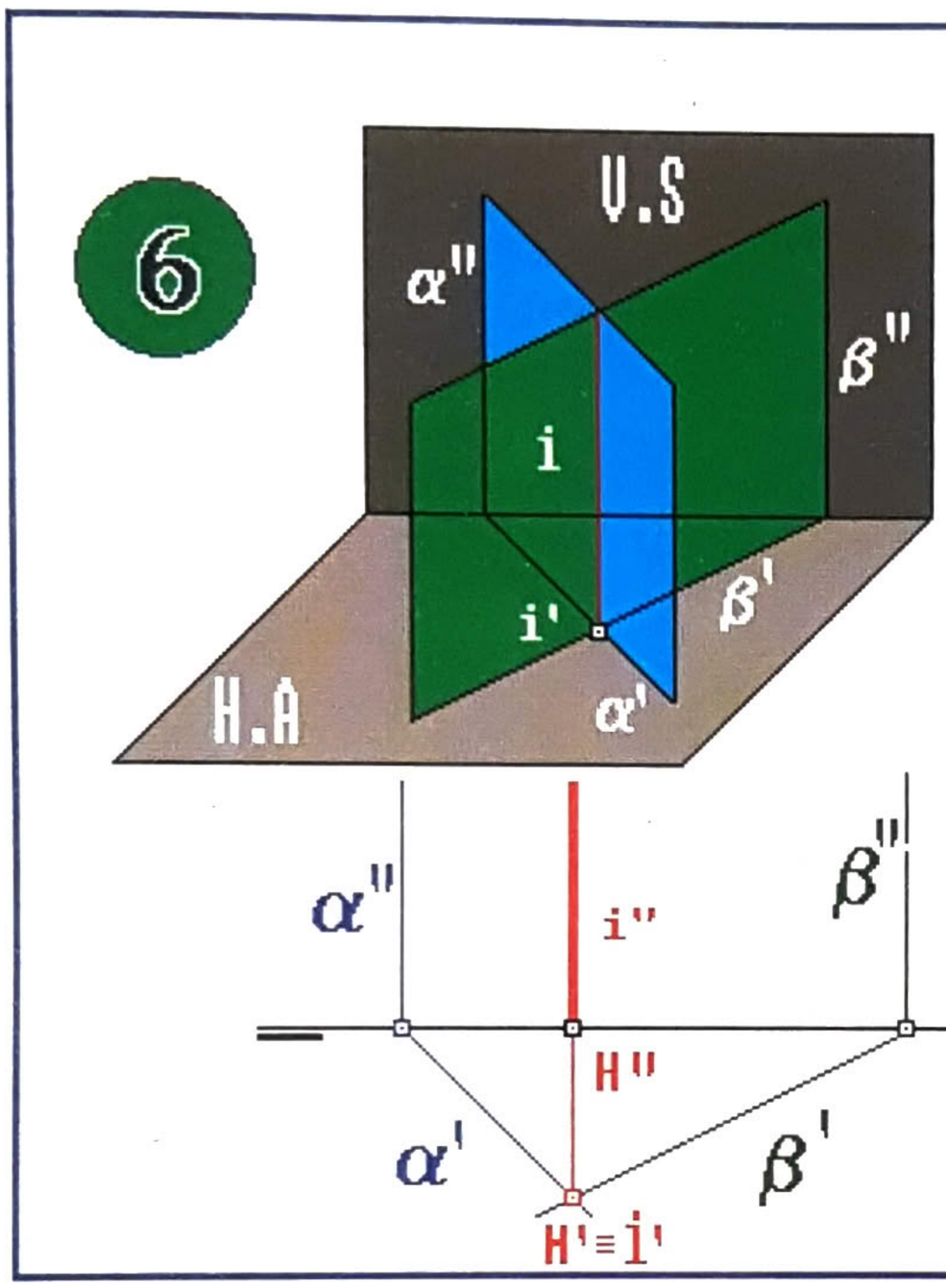
3

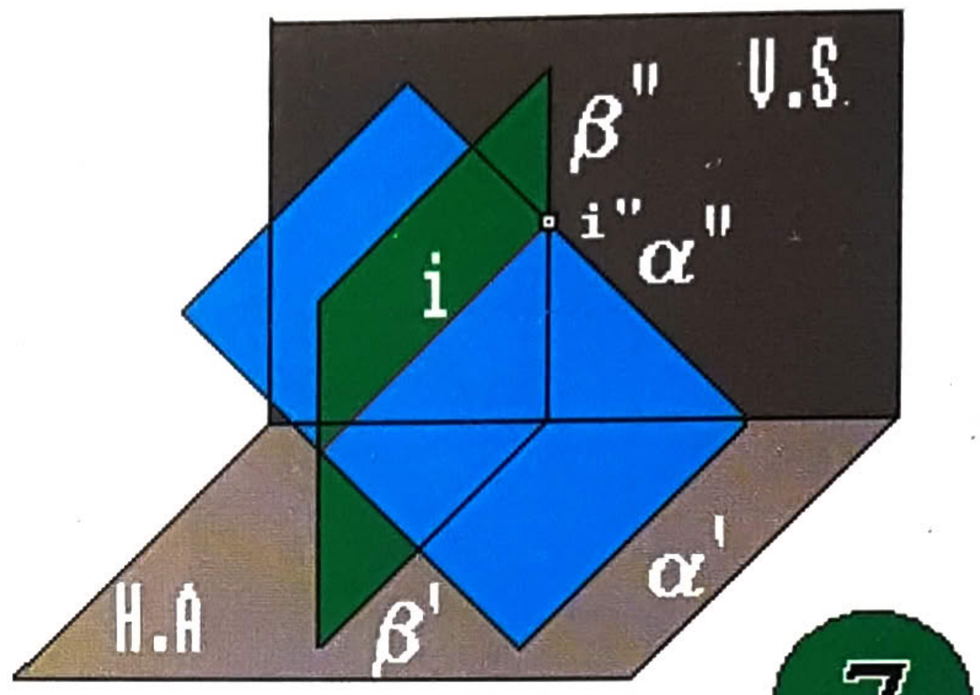

V"
α"
β"
i"
H"
V'
i'
α'
β'
H'

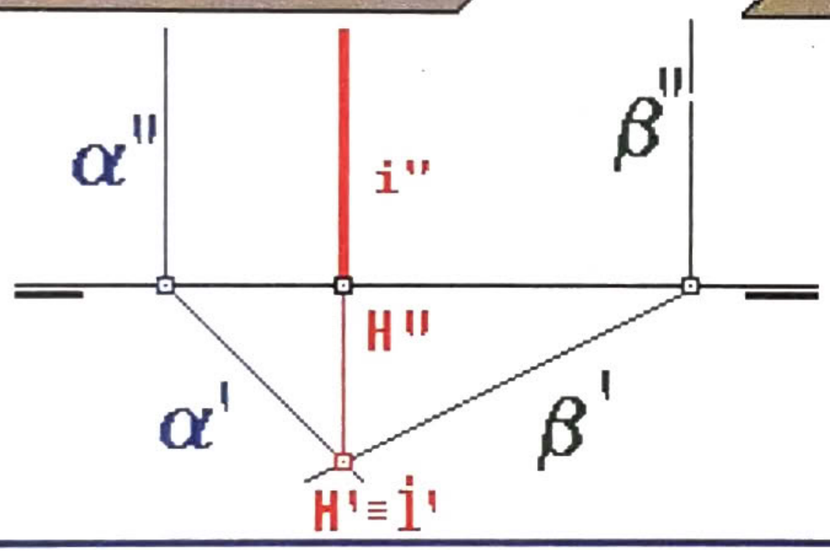
4

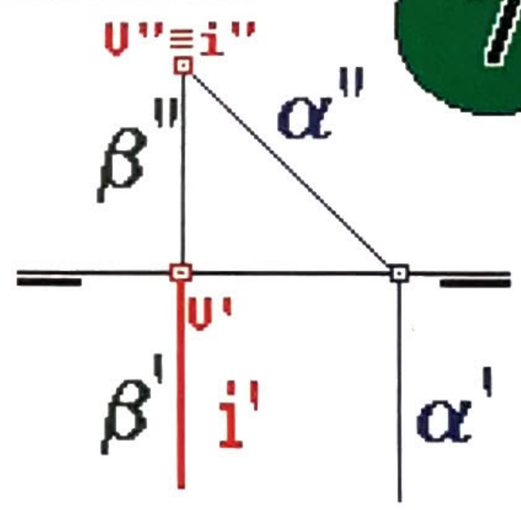

V"
α"
β"
i"
H"
V'
i'
α'
H'
β'
V"
β"
i"
H"
α"
V'
H'
i'
β'
α'

5

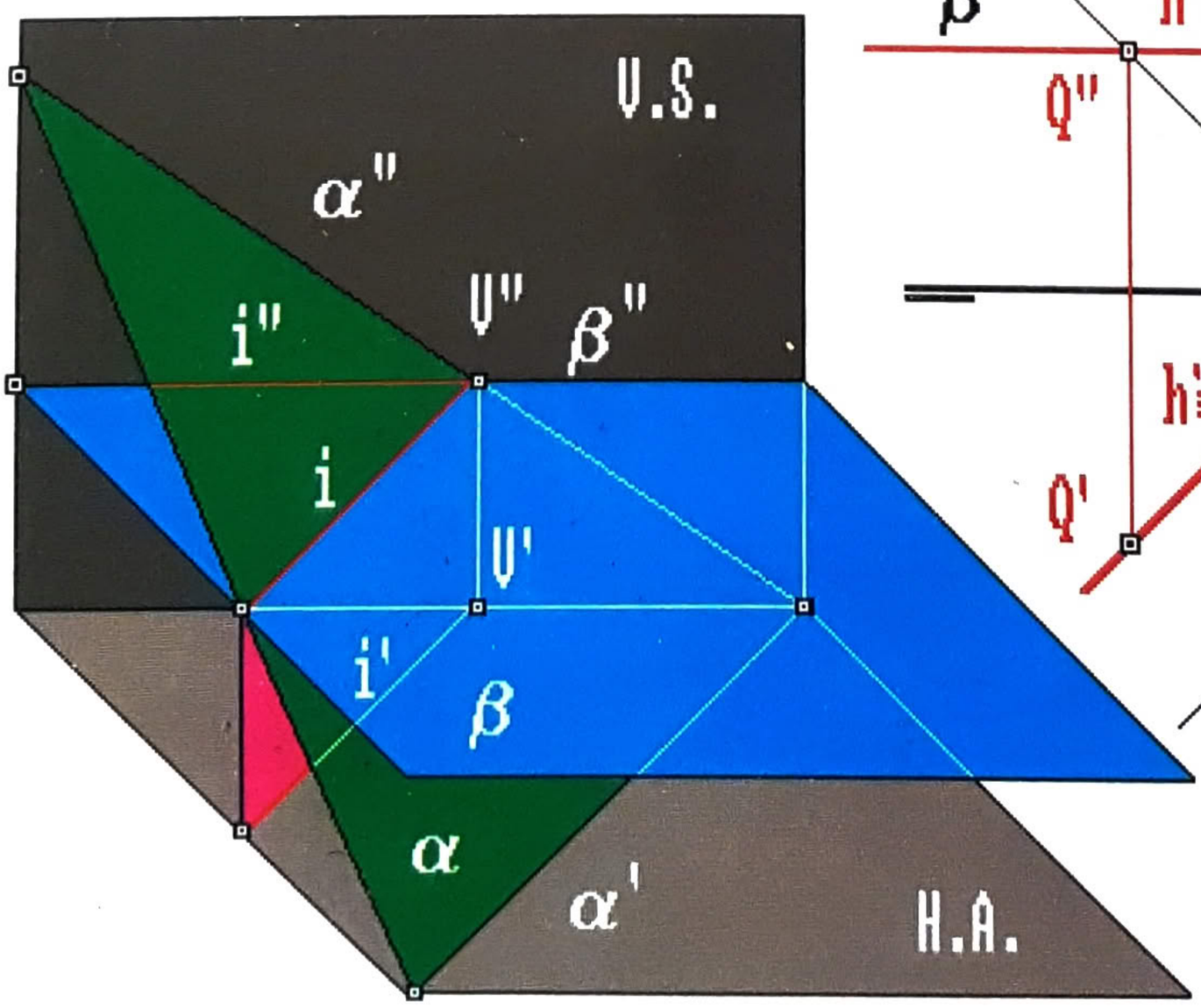

6
V.S
α''
β''
i
i'
β'
H.A
α'

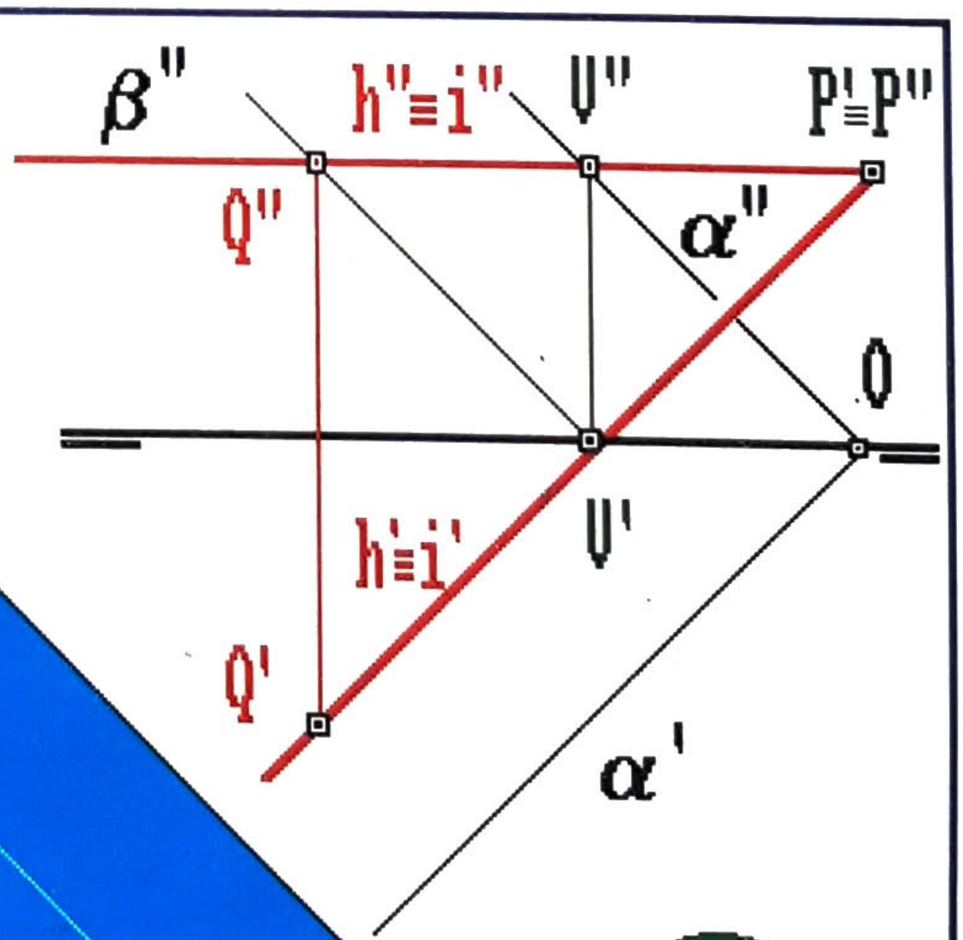

β''
V.S.
i''
α''
i
α'
H.A
β'


α''
i''
β''
H''
α'
β'
H'≡i'

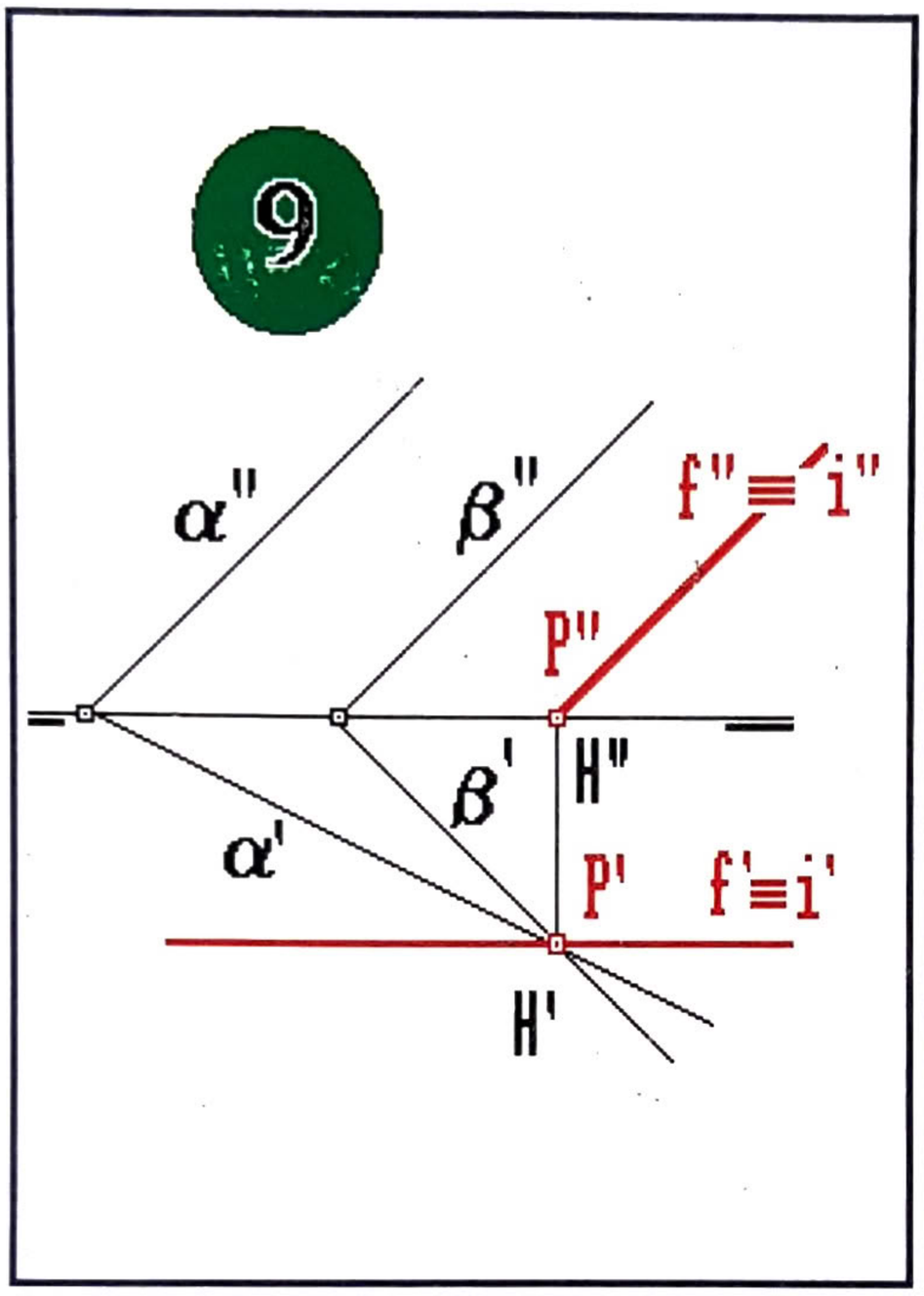

V''≡i''
β''
α''
V'
β'
i'
α'

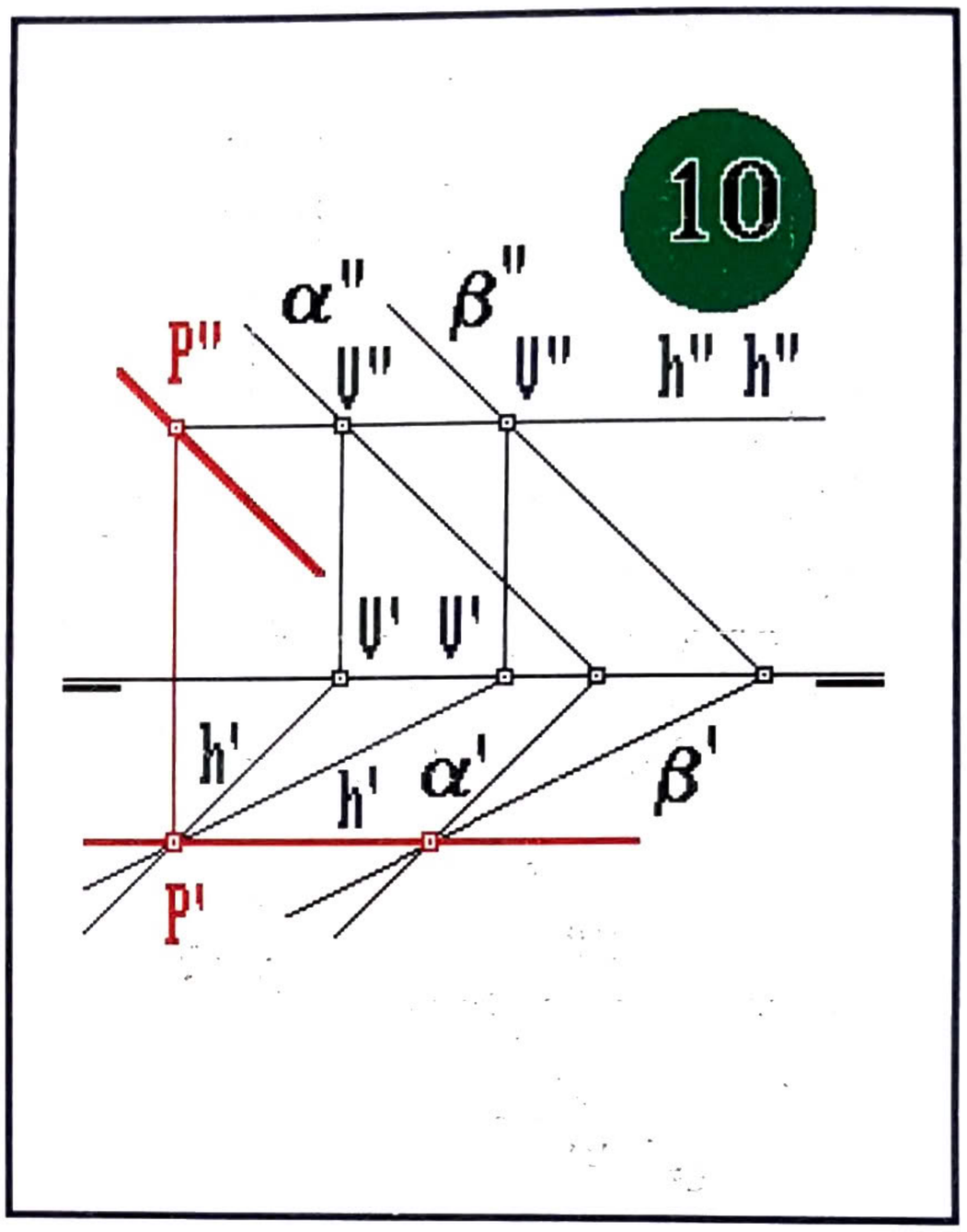
7

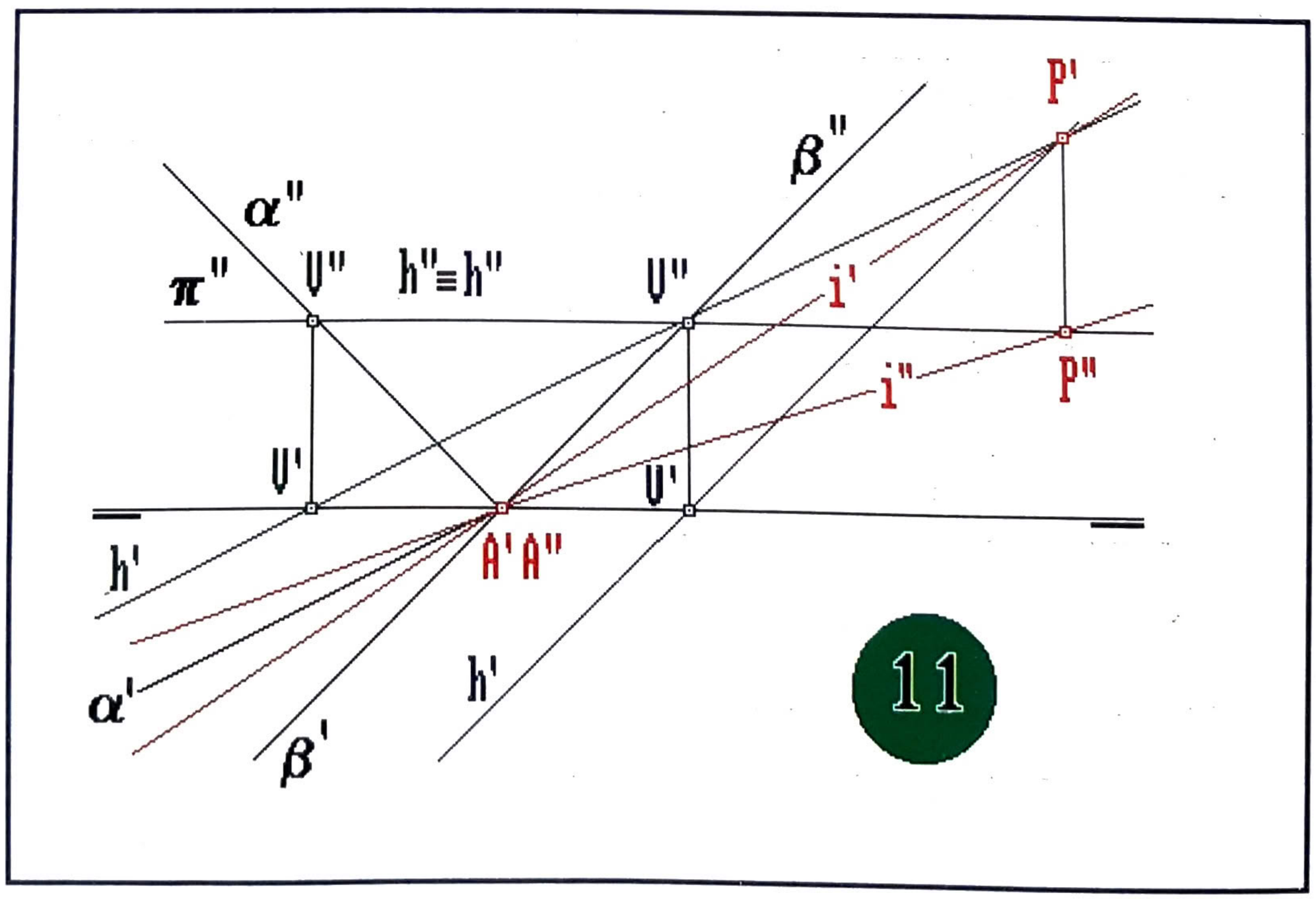

V.S.
α''
i''
V''
β''
i
V'
i'
β
α
α'
H.A.

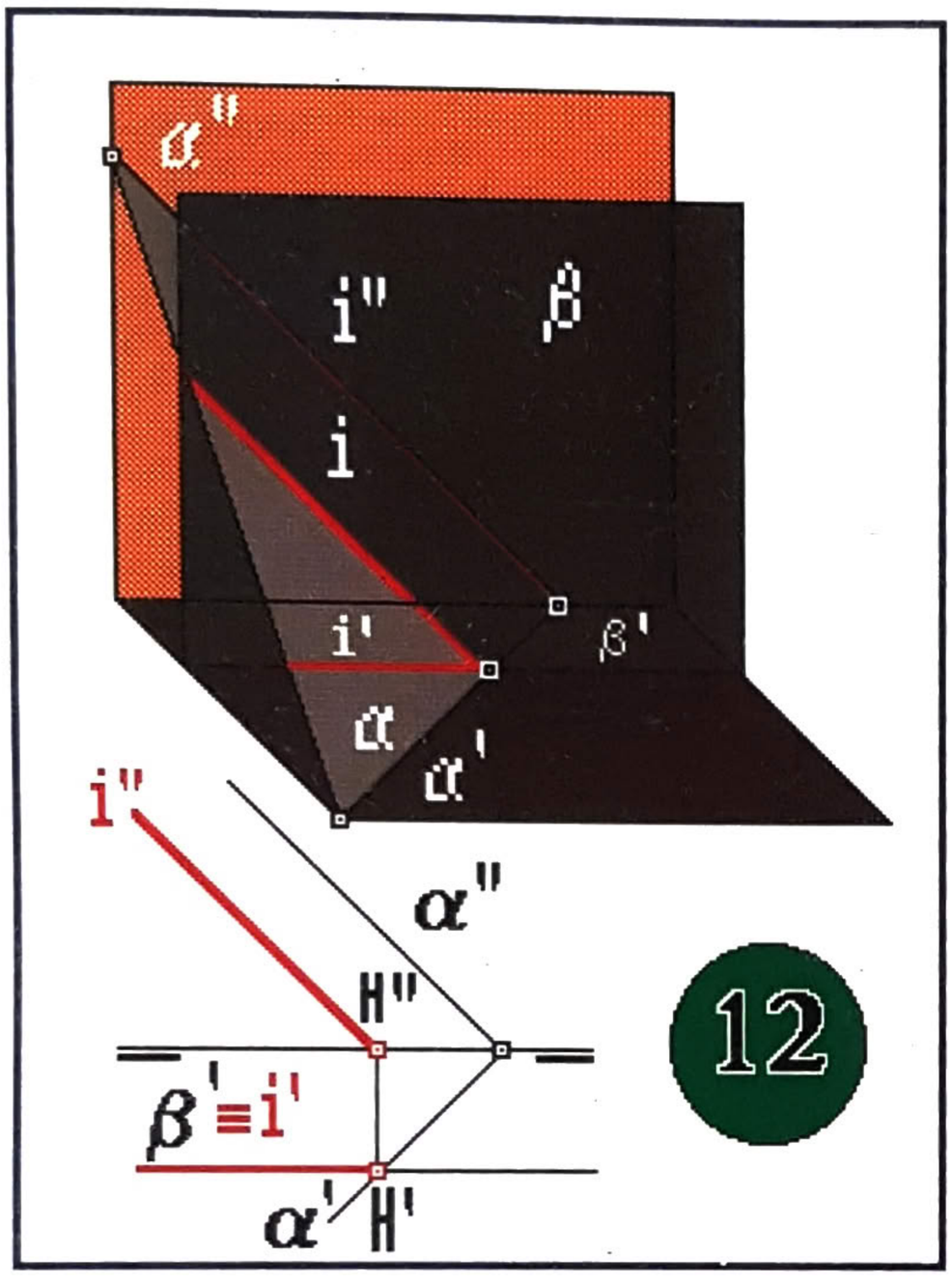

β''
h''≡i''
V''
P'≡P''
Q''
α''
Q
h'≡i'
V'
Q'
α'

8

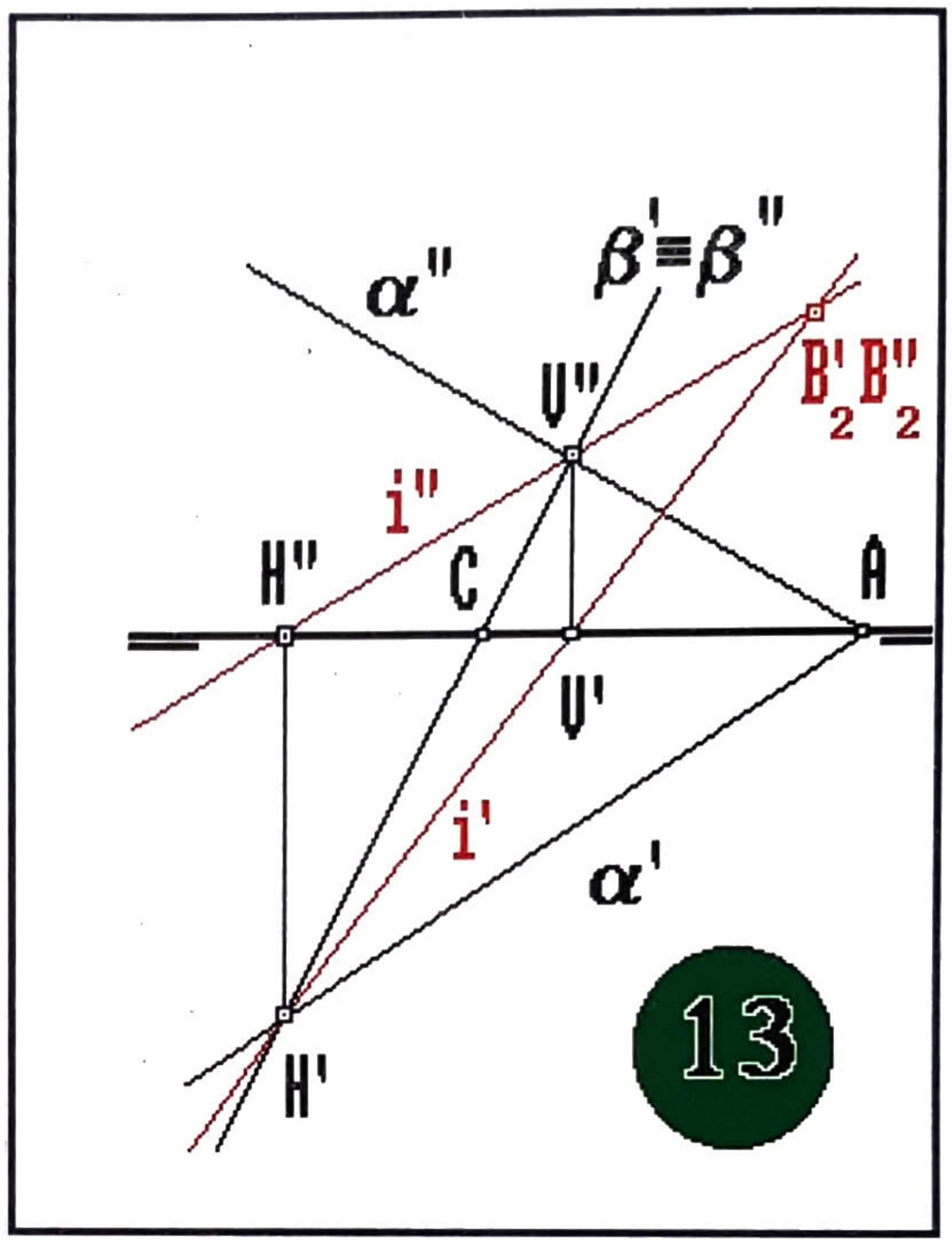

9
α"
β"
f"≡i"
P"
β'
H"
α'
P'
f'≡i'
H'


10
α"
β"
P"
V"
V"
h" h"
V' V'
h'
h'
α'
β'
P'

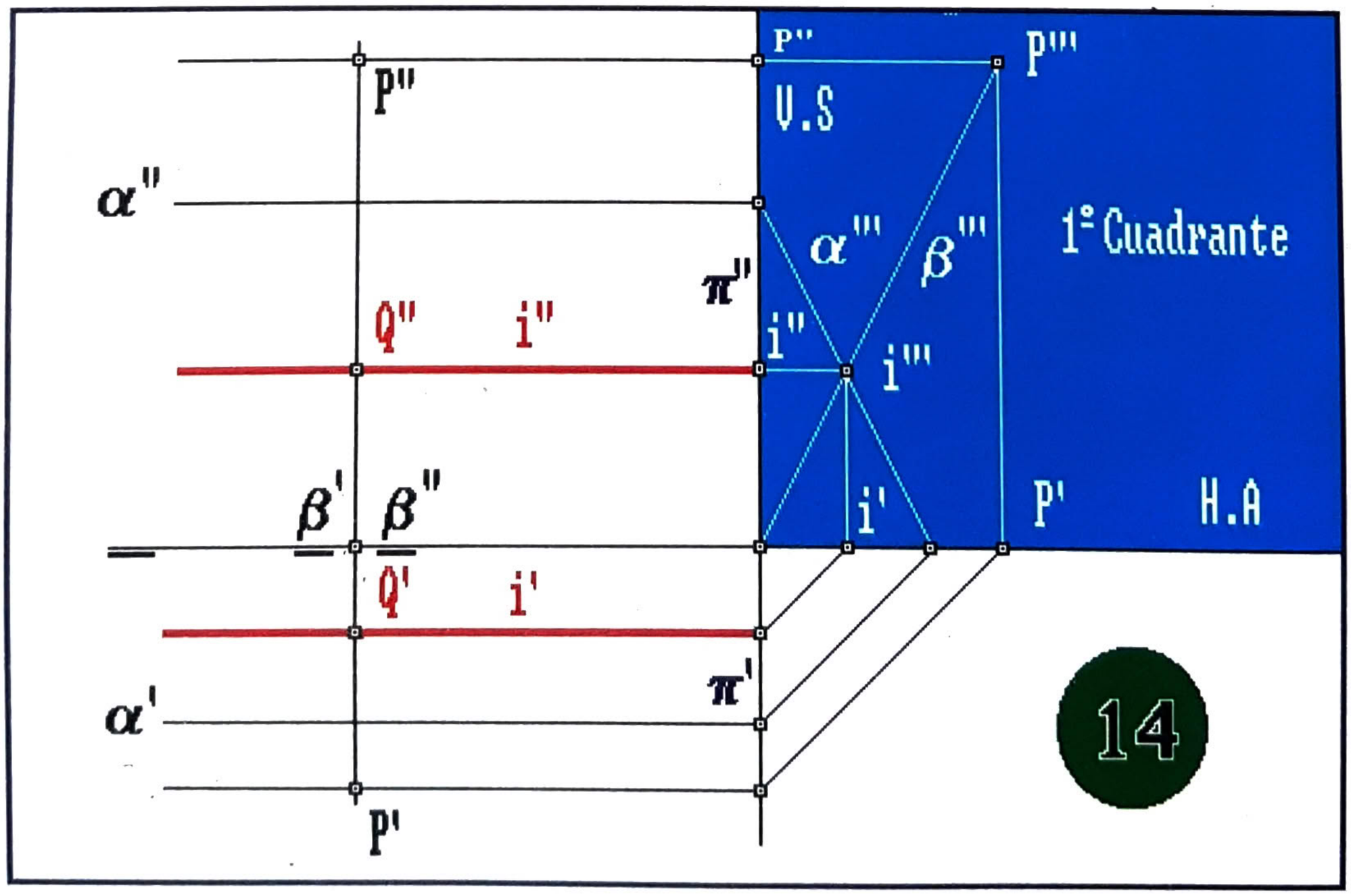

P'
β"
α"
π"
V"
h"≡h"
V"
i'
i"
P"
V'
V'
h'
A'A"
h'
α'
β'
11


α''
i''
β
i
i'
β'
α
α'
i''
α''
H''
β'≡i'
α'
H'

12

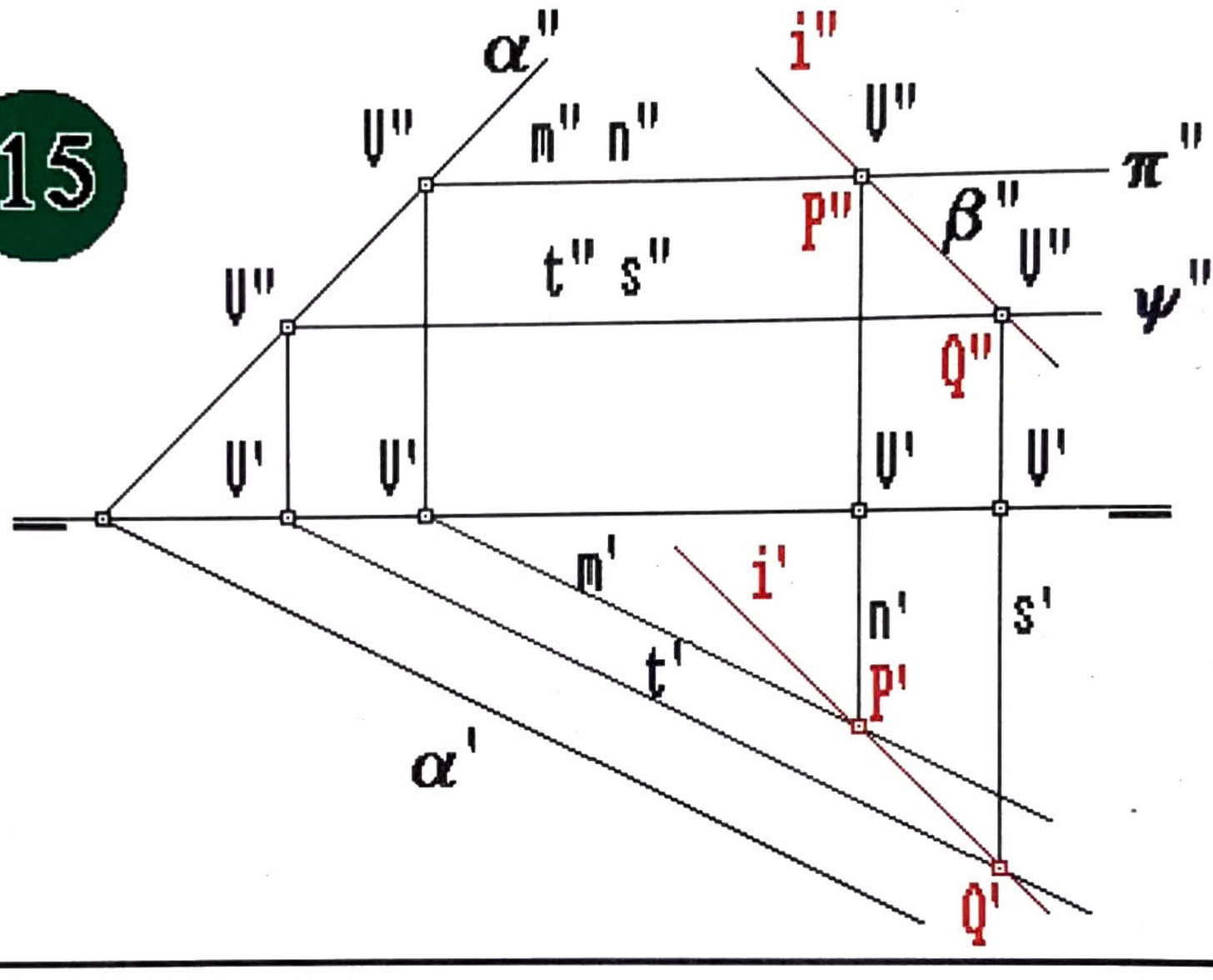

α''
β'≡β''
V''
B'2 B''2
i''
H''
C
A
V'
i'
α'
H'

13

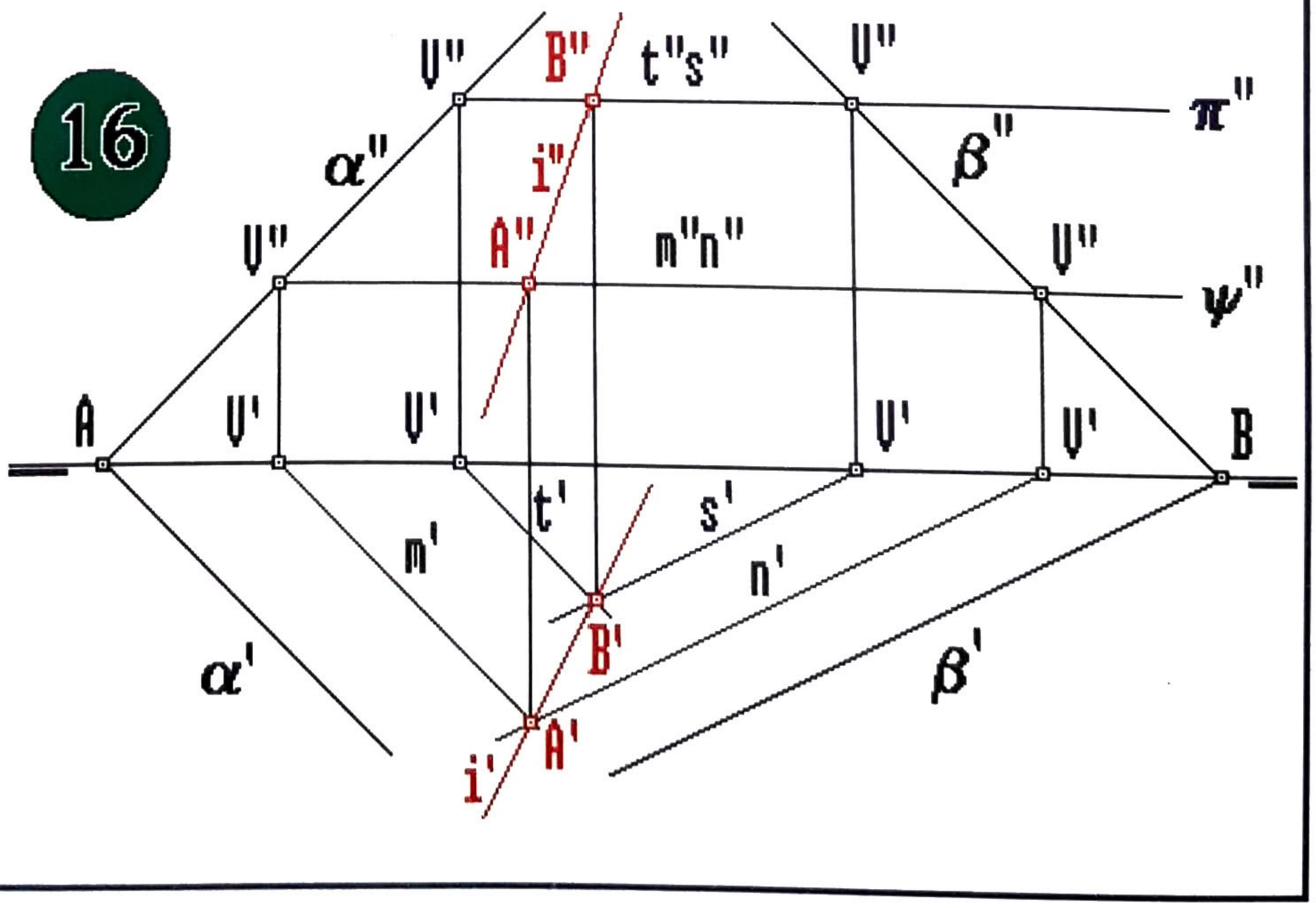

P''
P'''
V.S
α''
α'''
β'''
1° Cuadrante
π''
Q''
i''
i''
i'''
β'
β''
i'
P'
H.A
Q'
i'
π'
α'
P'

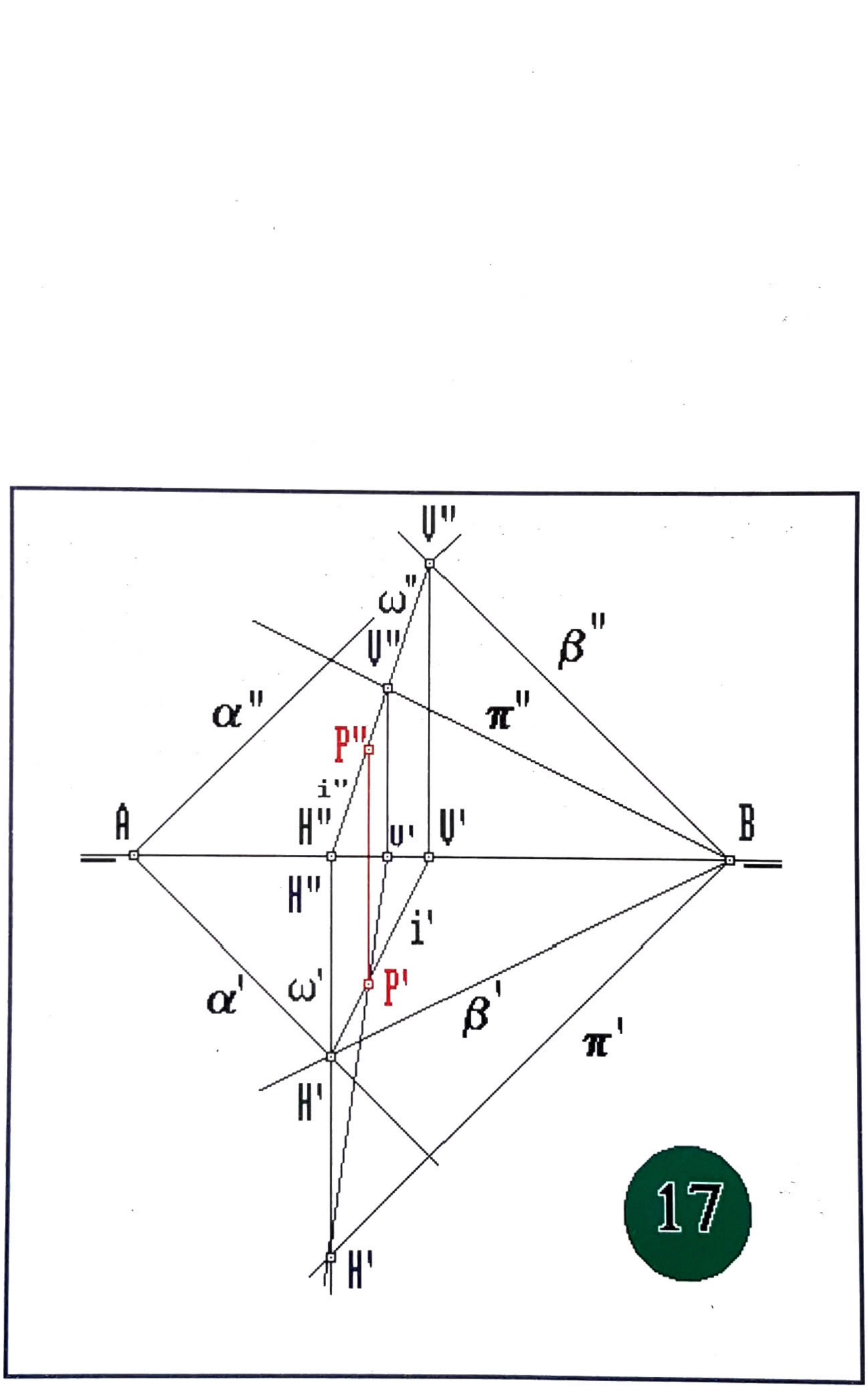
14

15


α"
i"
V"
V"
m" n"
π"
P"
β"
t" s"
V"
V"
ψ"
Q"
V'
V'
V'
V'
m'
i'
n'
s'
t'
P'
α'
Q'

16


V"
B"
t"s"
V"
π"
α"
i"
β"
V"
A"
m"n"
V"
ψ"
A
V'
V'
V'
V'
B
t'
s'
m'
n'
B'
α'
β'
i'
A'


V"
ω"
V"
β"
α"
π"
P"
i"
A
H"
υ'
V'
B
H"
i'
α'
ω'
P'
β'
π'
H'
H'
17

Paralelismo.

PARALELISMO

1º.- Si dos rectas en el espacio, son paralelas, sus proyecciones homónimas, también lo son.

En las figuras 1 y 2 las rectas m y n son paralelas, mientras que la recta s, no es paralela a ninguna de las anteriores.

En la figura 3 se observa el paralelismo entre las rectas t y s del espacio, y, en la figura 4, podemos demostrar cómo las rectas t y s, son paralelas por lo anteriormente expuesto, es decir las proyecciones horizontales t' y s' son paralelas entre sí, al igual que las proyecciones verticales t" y s".

2º.- Dos planos son paralelos, cuando sus trazas homónimas son paralelas.

En la figura 5 se observa el paralelismo entre los plano α y β, y en la figura 6 hemos representado dichos planos por sus trazas (intersección con los planos de proyección).

Al ser las trazas horizontales α' y β' paralelas entre sí, igualmente que las proyecciones verticales α'' y β'', los planos α y β son paralelos en el espacio.

3º.- Por un punto dado sólo se puede trazar un plano que sea paralelo a otro plano dado.

En la figura 7 conocemos el punto P cuyas proyecciones son P' y P" así como el plano β dado por sus trazas β' y β''.

Si pretendemos trazar un plano α, que pasando por el punto P sea paralelo al plano β procederemos de la siguiente forma:

1er caso.-

a) Por P' trazaremos h', paralelo a β', que cortará a la L.T. en V'h.
b) Por V'h trazamos una perpendicular a L.T.
c) Por P" trazamos h" paralela a L.T.
d) La intersección entre ambas, nos dará la proyección vertical V"h de la recta h.
e) Por V"h trazamos una paralela a β'' dándonos α'' , traza vertical del plano solución.
f) Por el punto de intersección entre α'' y la L.T. trazamos una paralela a β' dándonos la traza horizontal α' del plano solución.

Como se puede apreciar las trazas α' y α" son paralelas a β' y β" respectivamente, y el plano α pasa por el punto P, ya que dicho punto pertenece al plano α, por estar sus proyecciones P' y P" contenidas en la recta h, que pertenece al plano. (Esta recta h es una horizontal del plano α) y su única traza V"h está contenida en la traza vertical α" del plano.

2º caso.- Este caso lo hemos resuelto de la misma forma pero utilizando una recta f, frontal de plano.

La solución es similar a la anterior quedando resuelta su solución en la misma figura 7.

4º.- Por un punto dado sólo se puede trazar una recta que sea paralela a otra recta dada.

En la figura 8 conocemos el punto P, cuyas proyecciones son P' y P" así como la recta s de proyecciones s' y s".

Para trazar por el punto P una recta t, que sea paralela a la recta dada s trazaremos por P" una paralelal a s".

Al ser las proyecciones homónimas de las rectas s y t paralelas y el punto P estar contenido en la recta t, las proyecciones de la recta t, son la única solución al problema propuesto.

5º.- Para que una recta sea paralela a un plano, es necesario que la recta sea paralela a cualquier recta contenida en el plano.

Este caso tiene infinitas soluciones, ya que en un plano podemos trazar infinitas rectas.

En la figura 8 la recta t es paralela al plano α ya que la recta t es paralela a la recta s contenida en dicho plano.

En la figura 9 las rectas m y n son paralelas al plano α, ya que las proyecciones de las rectas m y n son respectivamente paralelas a las proyecciones de las rectas s y t, ambas contenidas en el plano α.

6º.- En la figura 10, hemos resuelto el caso de hacer pasar por la recta s un plano paralelo a otra recta m.

Los pasos a seguir son los siguientes:

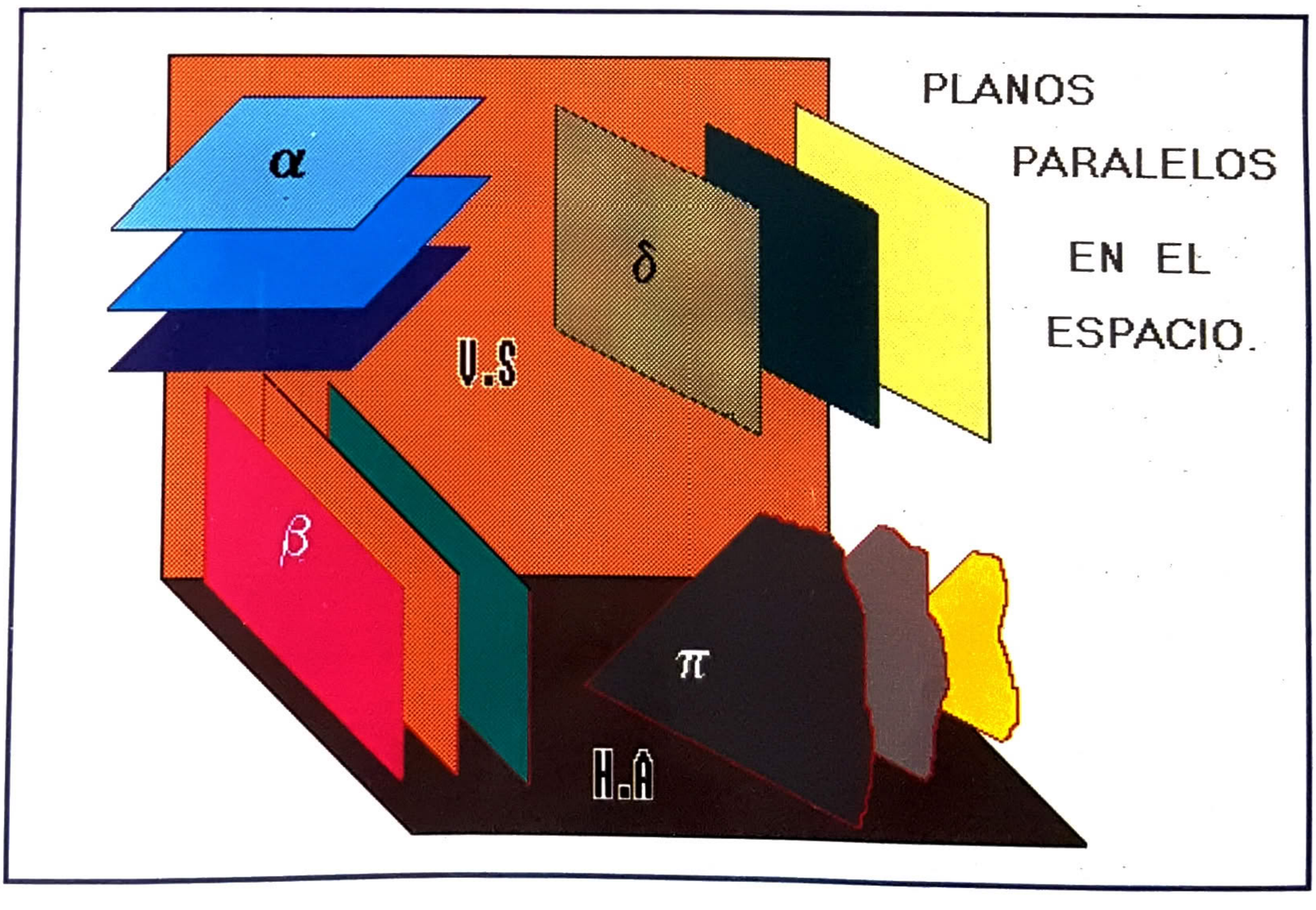
a) Tomamos un punto cualquiera P de la recta s.

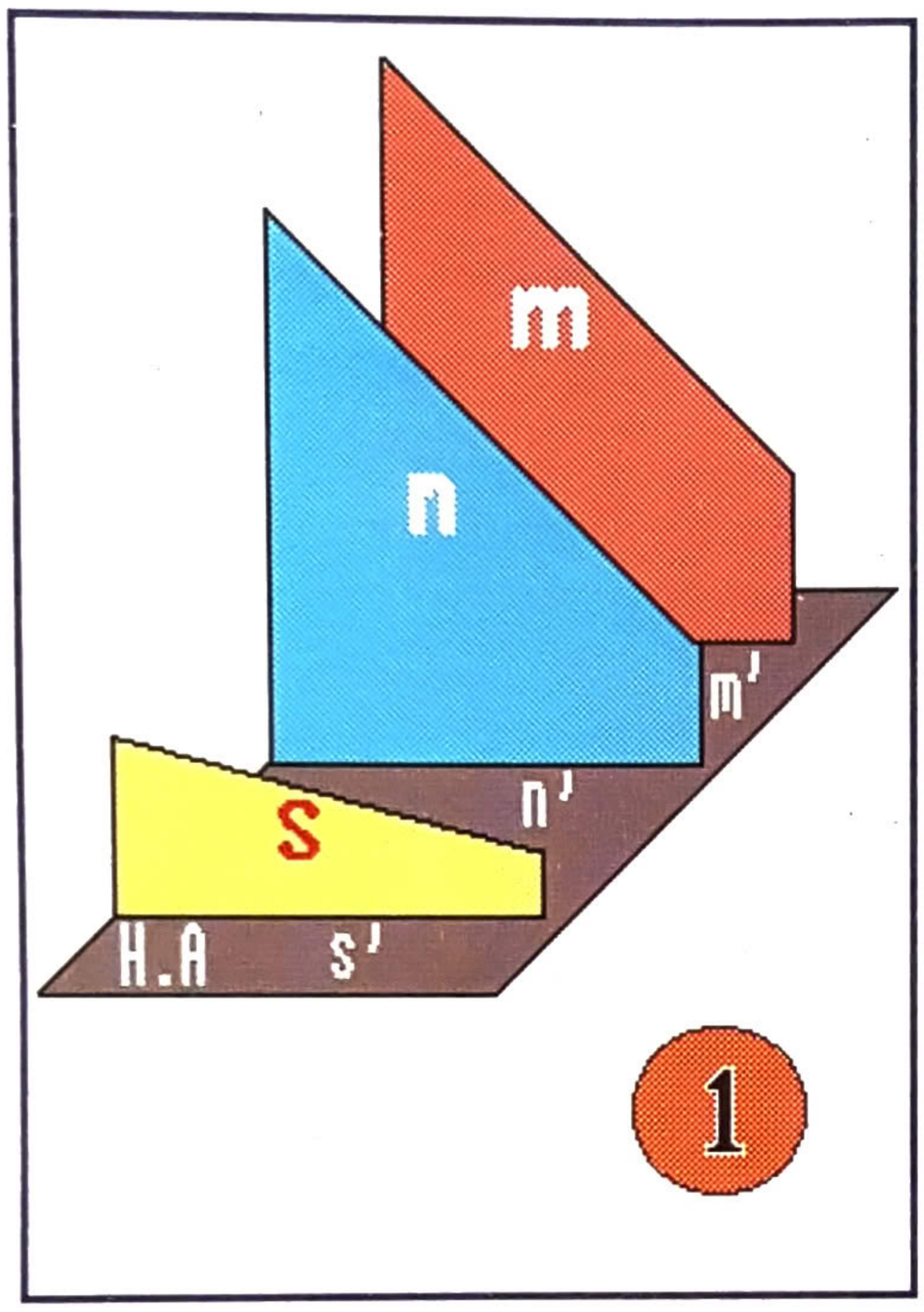
b) Por dicho punto trazamos una recta cualquiera t, con la condición de que dicha recta sea paralela a la recta dada m, es decir las proyecciones t' y t"deberán ser paralelas a m' y m".

c) Obtenemos las trazas V" y H' de la recta t, que unidas con las trazas de la recta s, nos darán las trazas α' y α'' del plano pedido.

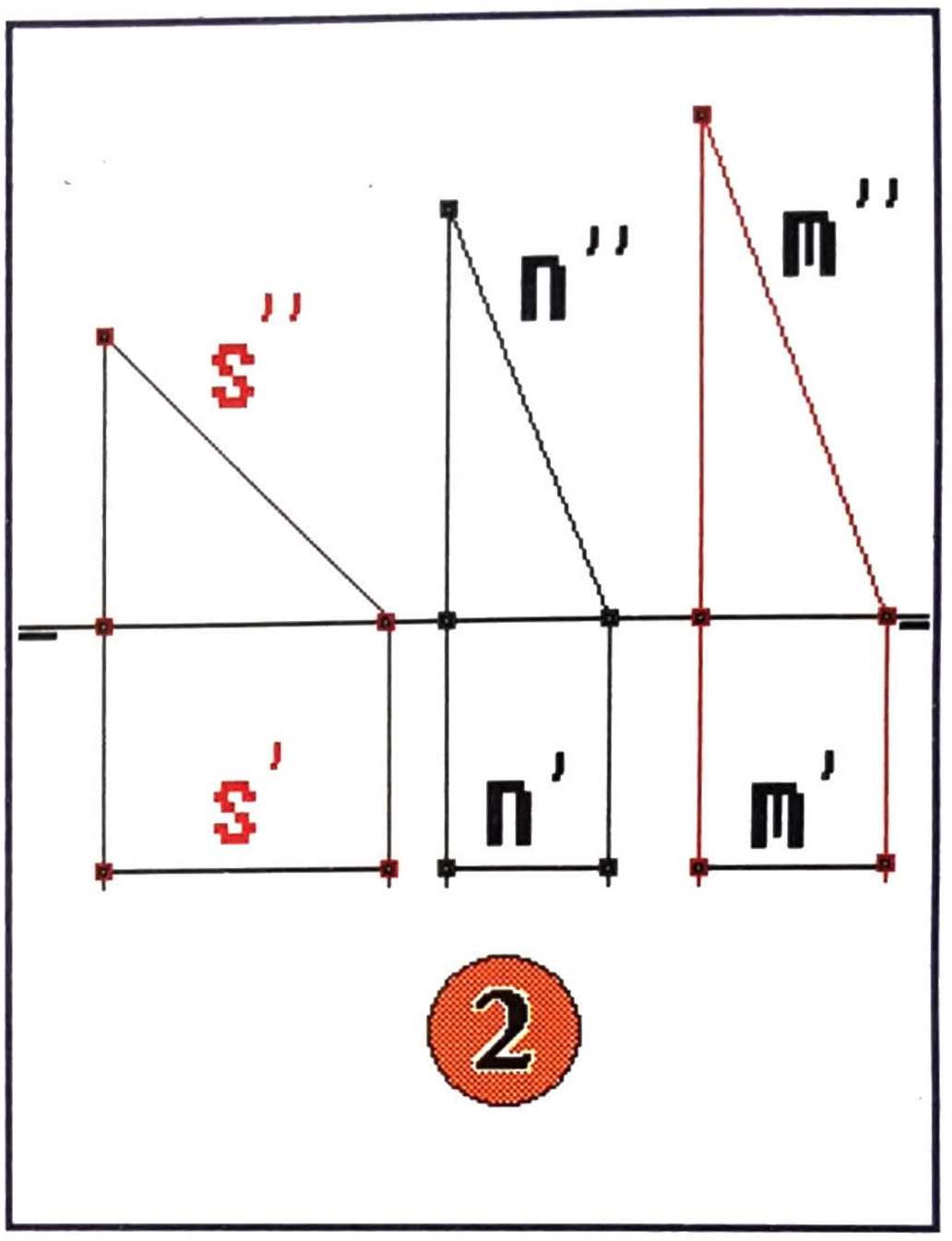
7º.- En el caso en que se nos presenten las trazas de un plano paralelas a L.T., su intersección será también una recta i paralela a L.T. como puede apreciarse en la figura 11.

Este caso podrá resolverse por varios sistemas como hemos estudiado con mayor detenimiento en el capítulo: "INTERSECCIONES DE PLANOS".

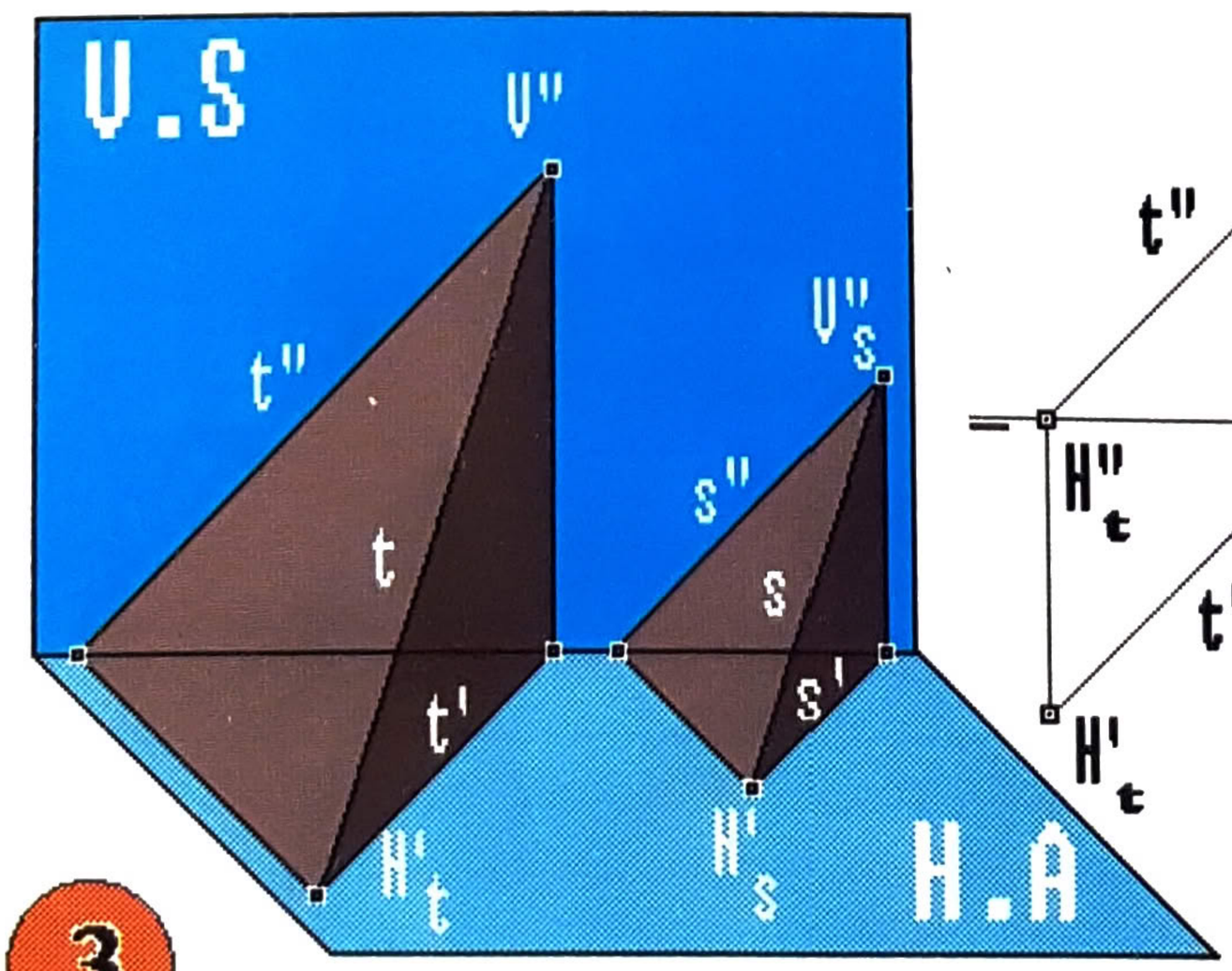



m
n
m'
n'
S
H.A
s'

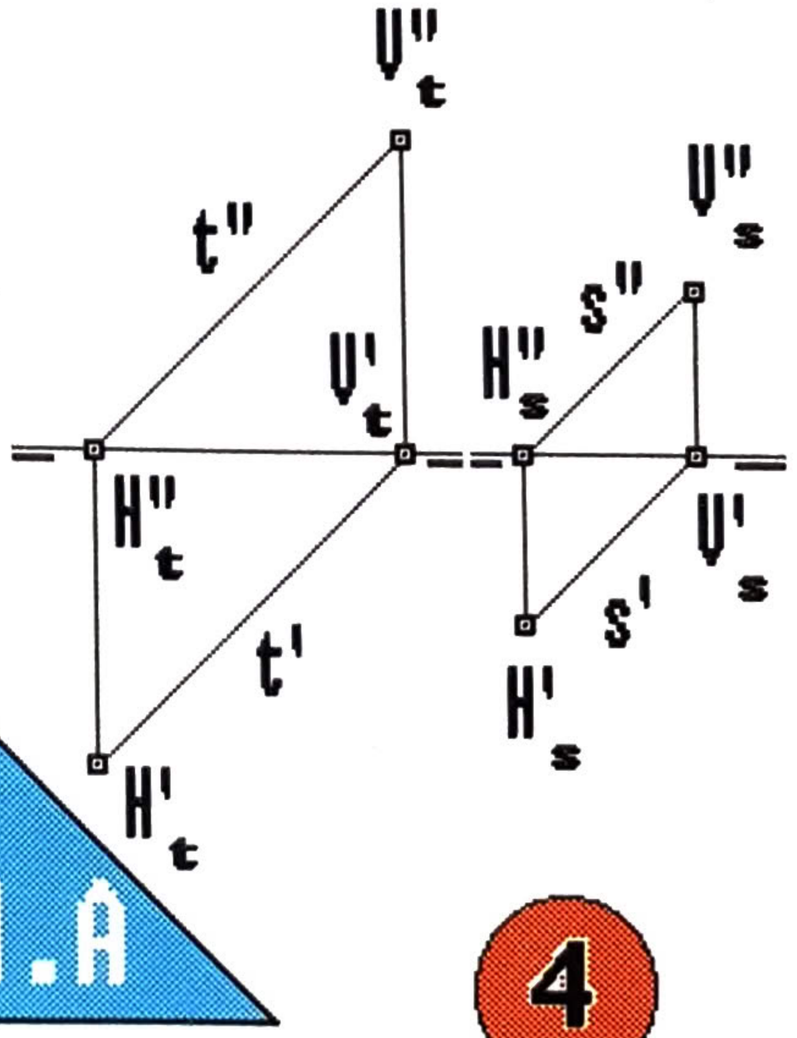
1


s''
n''
m''
s'
n'
m'

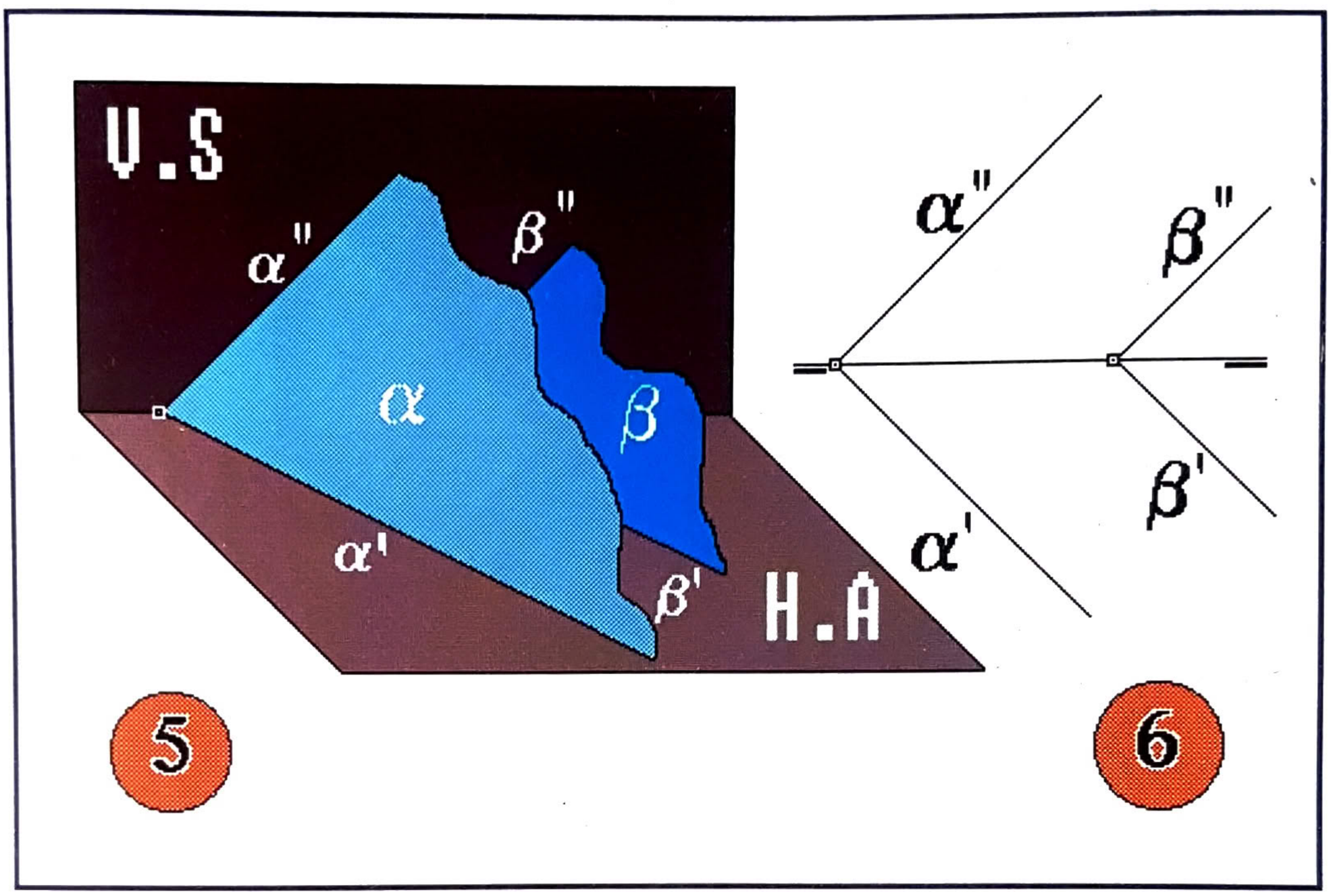
2


V.S
V''
t''
t
t'
V''s
s''
s
s'
H't
H's
H.A

3

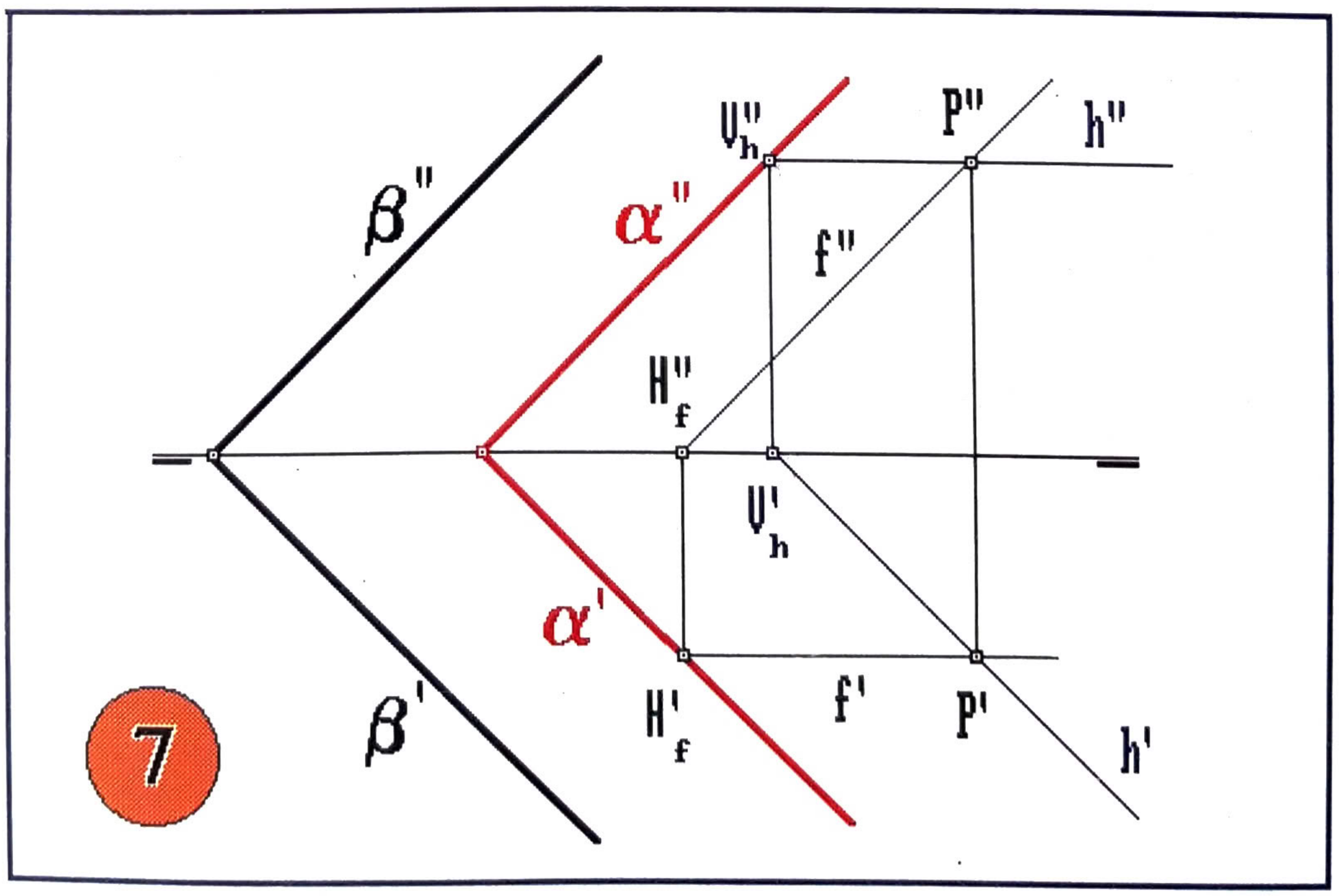

V''t
t''
V''s
V't
H''s
s''
H''t
V's
s'
t'
H's
H't

4

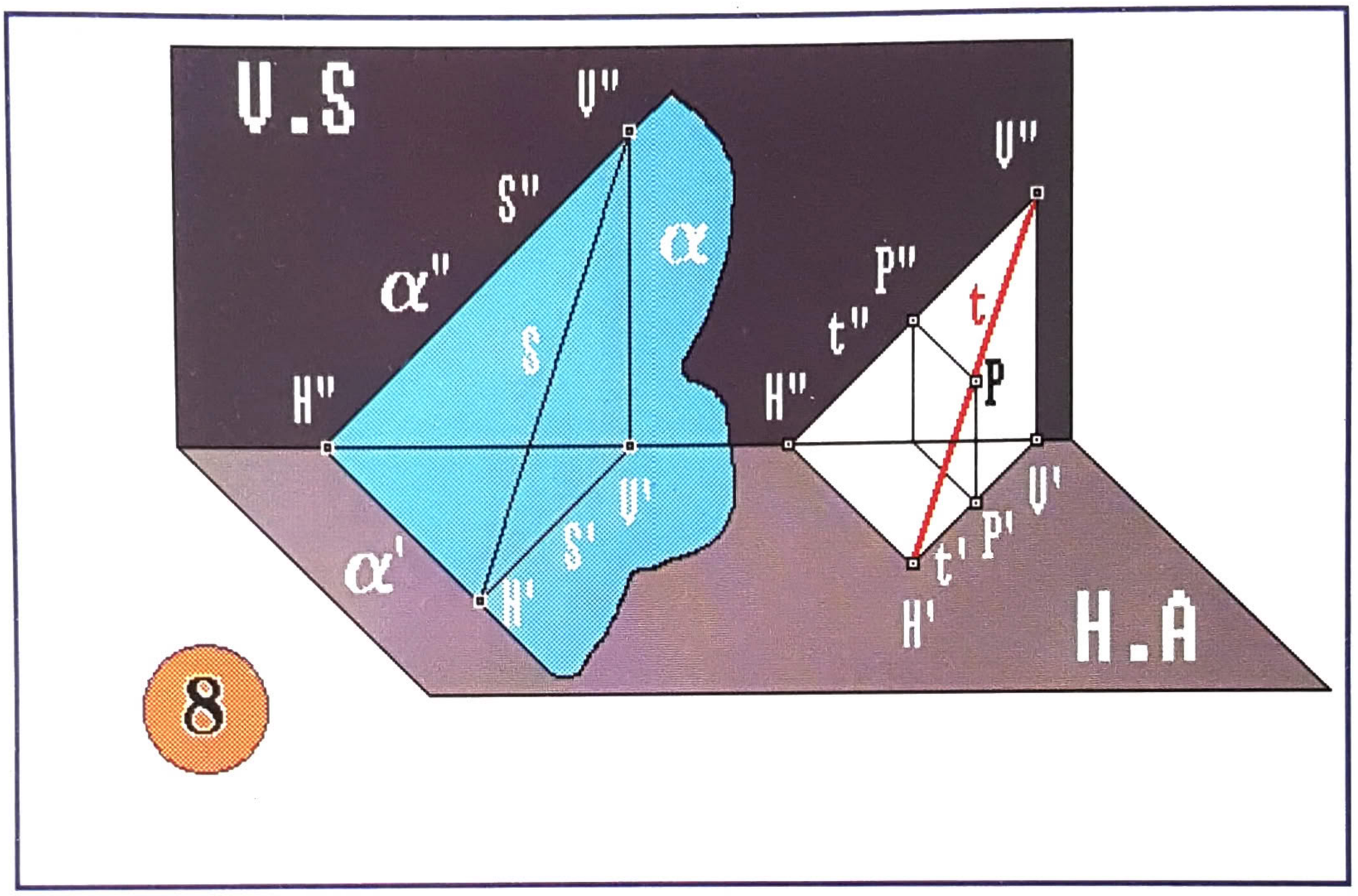


5

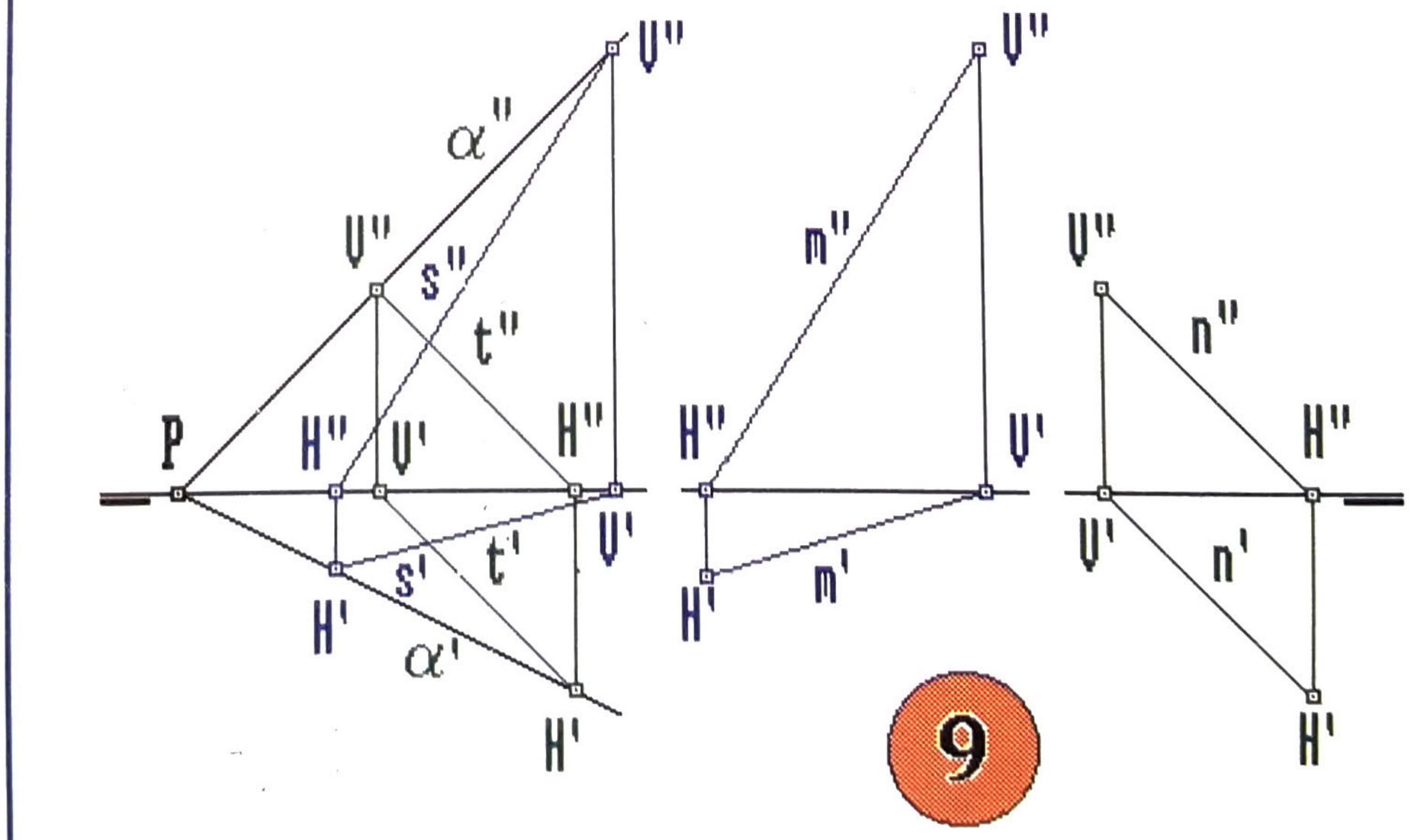
6



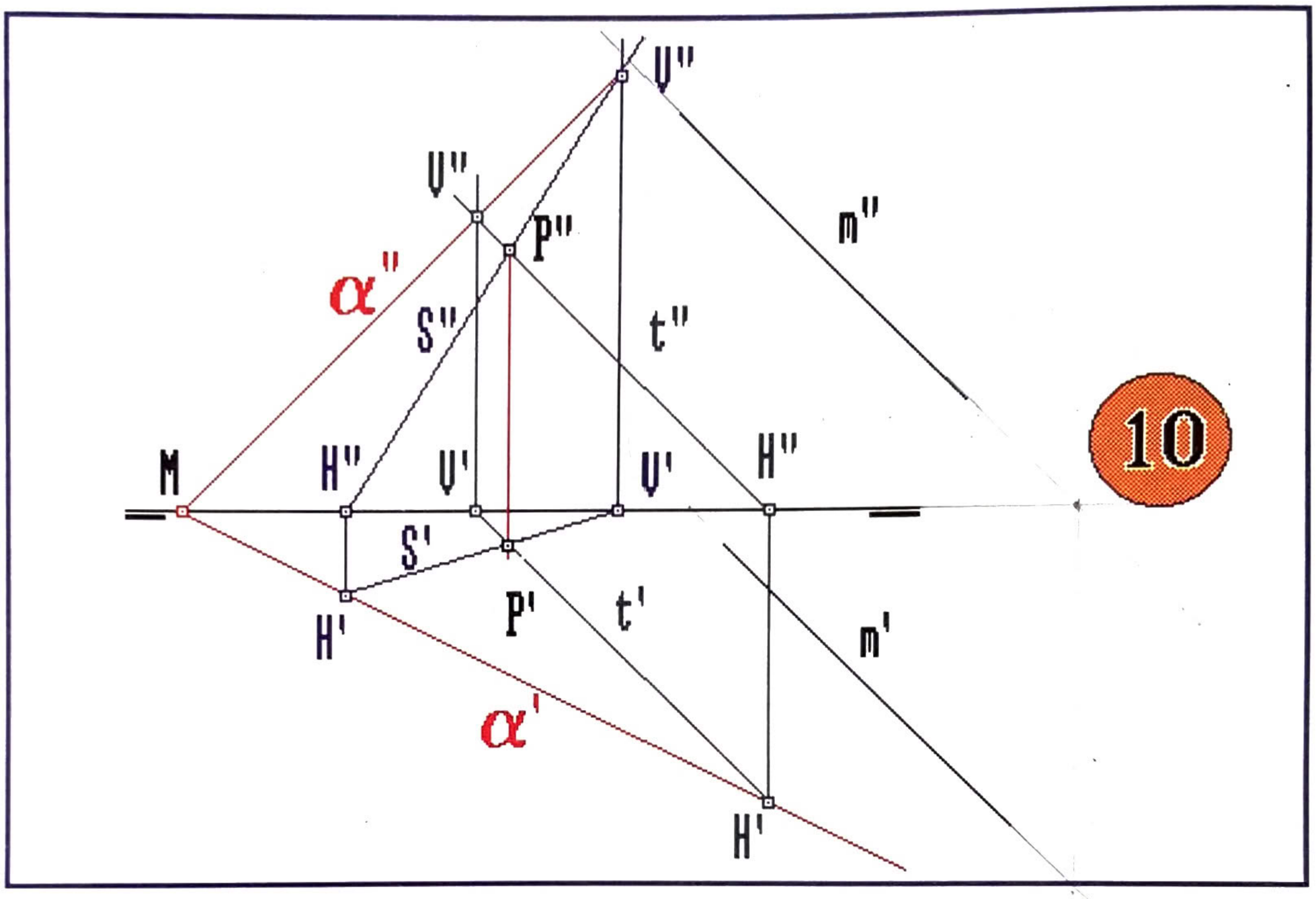
7

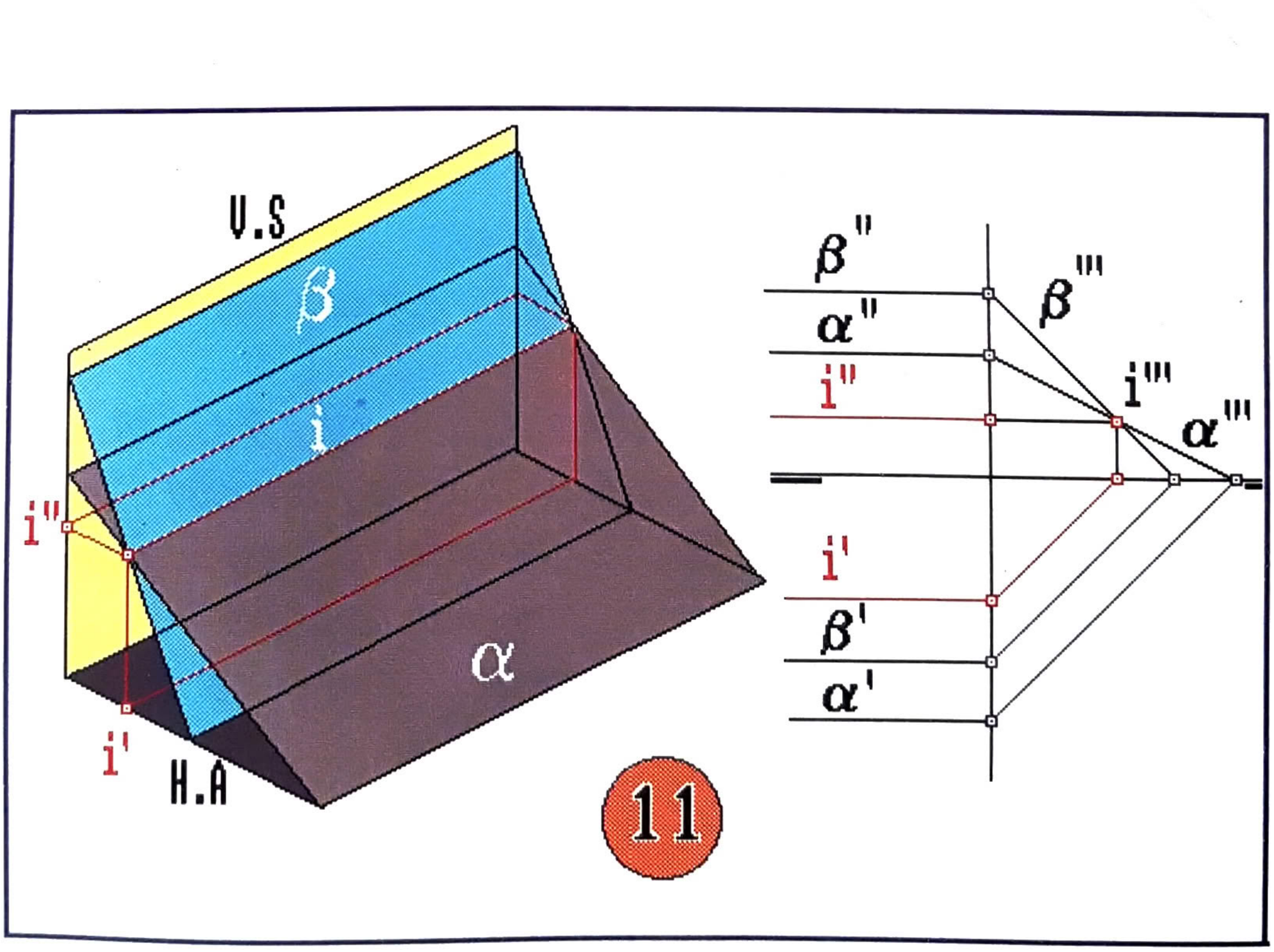

V.S
V"
S"
α"
α
S
H"
V"
P"
t"
t
P
H"
α'
H'
S'
V'
t'
P'
V'
H'
H.A

8


V"
α"
V"
S"
t"
P
H"
V'
H"
H'
S'
V'
α'
H'
V"
m"
H"
V'
H'
m'
V"
n"
H"
V'
n'
H'

9


V"
V"
P"
α"
m"
S"
t"
M
H"
V'
V'
H"
S'
H'
P'
t'
m'
α'
H'
10


V.S
β
i
i"
α
i'
H.A
β"
α"
i"
β'"
i'"
α'"
i'
β'
α'
11

PARALELISMO
EJERCICIO Nº 1

R-Y-X

La traza vertical de un plano α, pasa por los puntos M (0,0,0) y A (40,40,0).

La traza horizontal pasa por los puntos M (0,0,0) y B (40,0,20).

R-Y-X (R-Y-X)

1º Determinar las trazas de un plano β que, siendo paralelo al plano α, contenga al punto P (60,−26,11).

2º Determinar las trazas de un plano π que, siendo paralelo al plano β, contenga al punto Q (40,18,0).

PARALELISMO
EJERCICIO Nº2

1º Determinar las trazas de una recta t, que contenga al punto P y sea paralela a una recta dada s.

DATOS: La recta s pasa por los puntos H (0,0,−53) y O (18,18,−18).

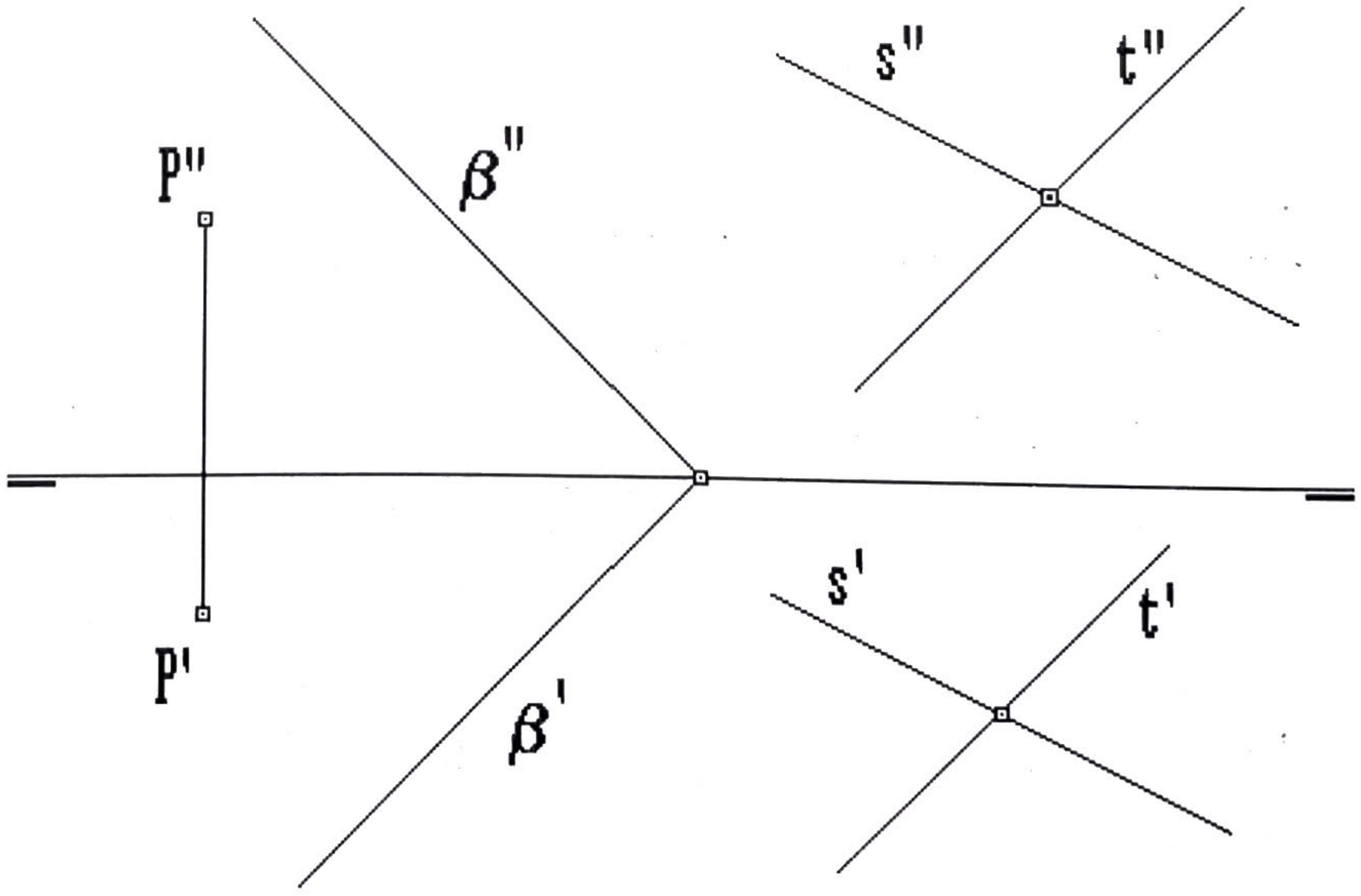
2º La traza vertical de un plano α pasa por la proyección H' de la recta t y por el punto M(100,0,0). Determinar la traza horizontal de α para que el punto P esté contenido en dicho plano.

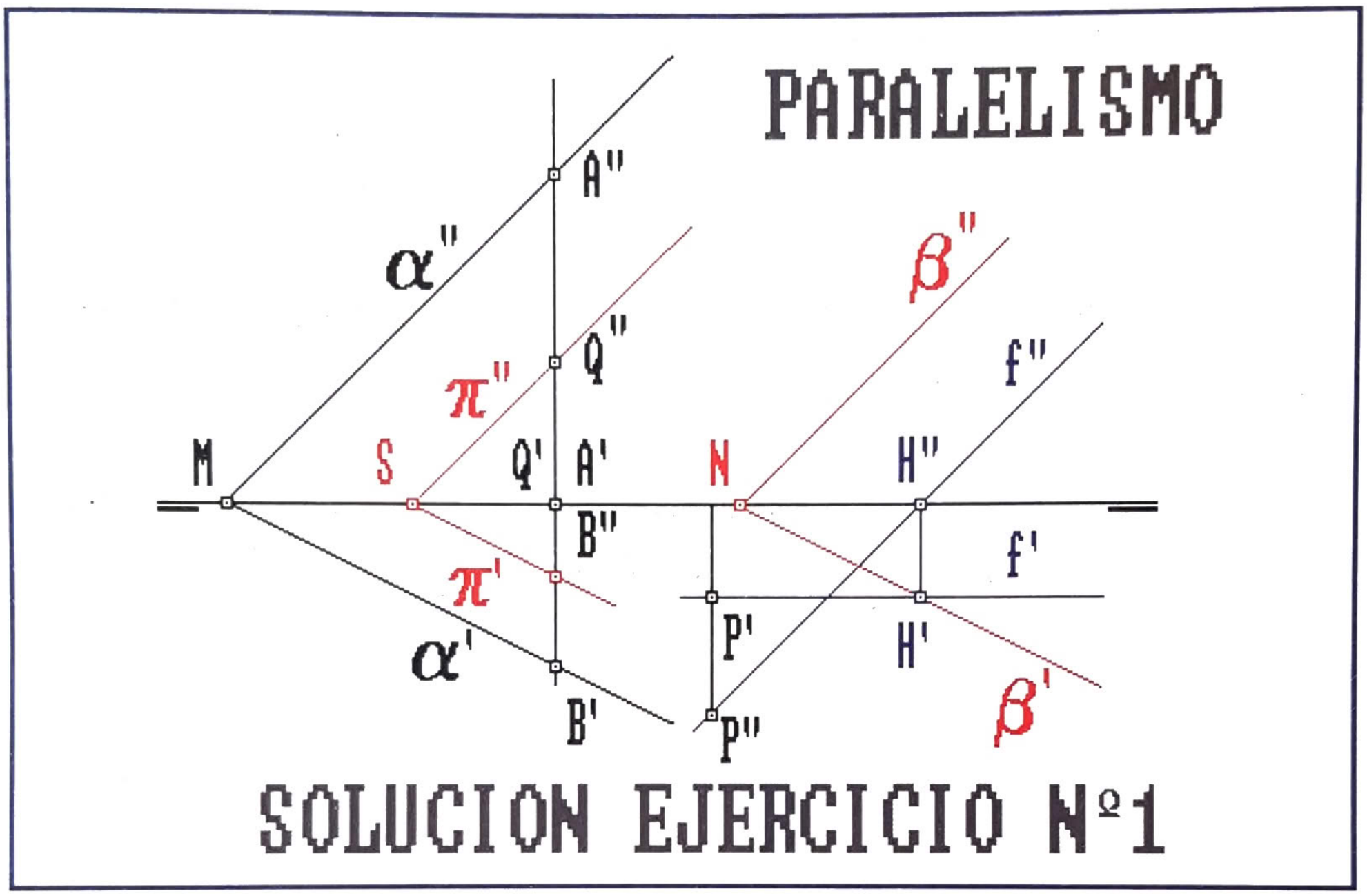
3º Encontrar los puntos que pertenezcan al plano α y a los planos bisectores.

PARALELISMO
EJERCICIO Nº3

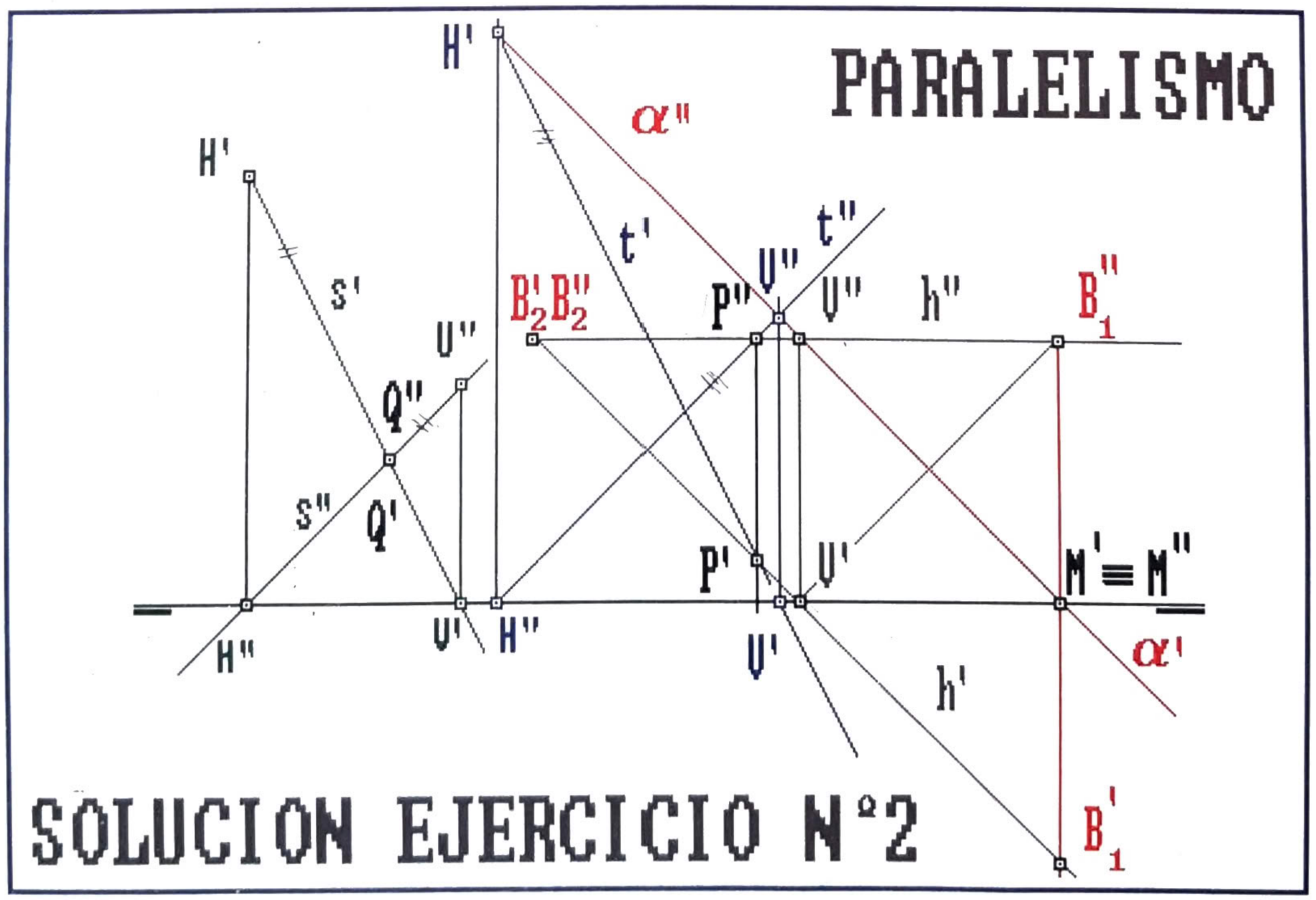
1º Por el punto P, trazar un plano α, que sea paralelo a los rectas dadas s y t no coplanarias.

2º Encontrar los valores de un punto B que, pertenezca a la vez, a los planos α, β y al primer plano bisector.





SOLUCION EJERCICIO Nº1

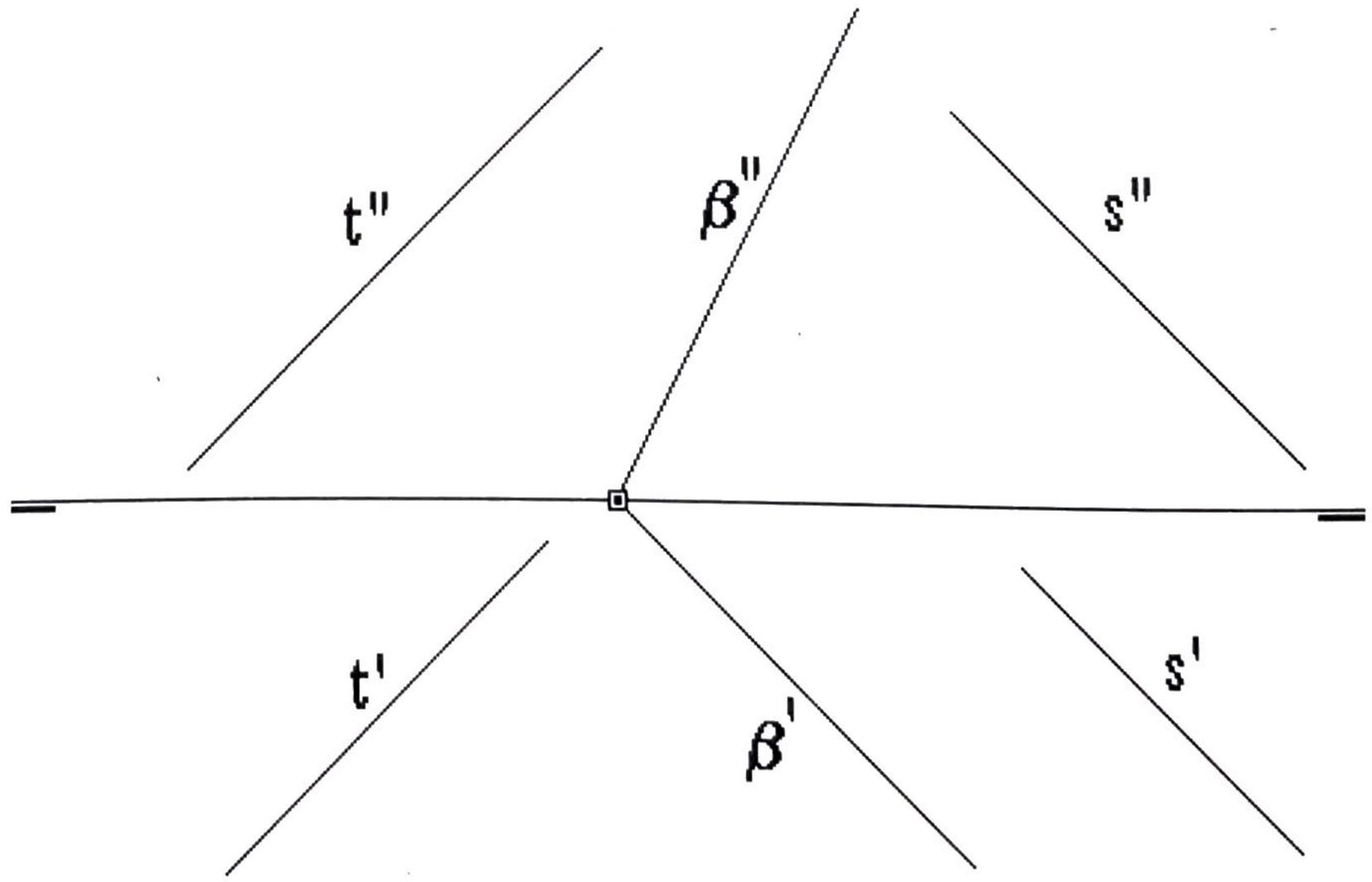


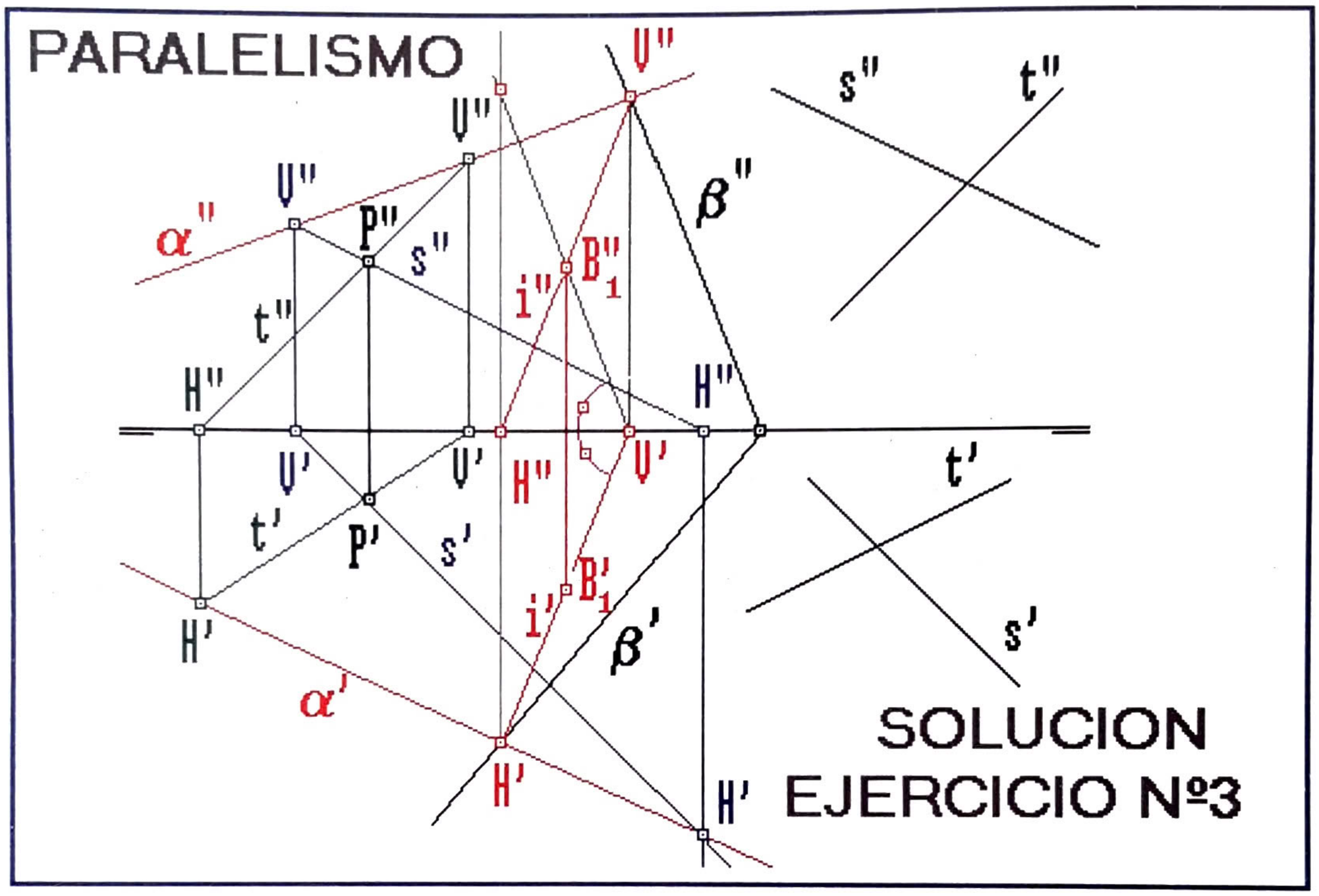
SOLUCION EJERCICIO N°2

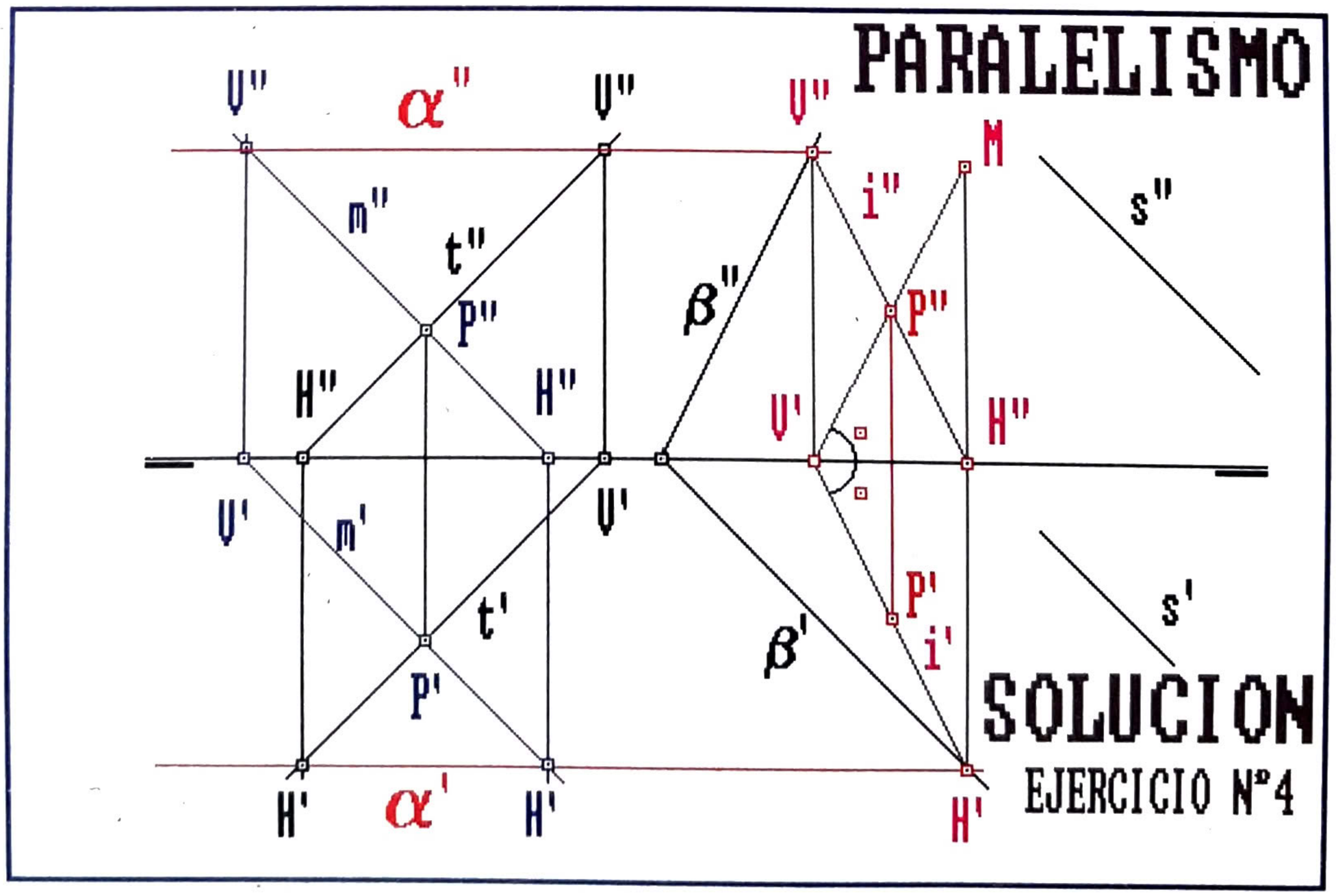
PARALELISMO
EJERCICIO Nº 4

1º Trazar un plano α *que , pasando por la recta t , sea paralelo a otra recta dada s.*

2º Determinar las proyecciones de un punto P que , pertenezca a la vez a los planos α *,* β *y al primer bisector.*




PARALELISMO
V"
α"
V"
V"
V"
β"
P"
s"
B"1
i"
t"
H"
H"
H"
V'
V'
V'
H"
V'
t'
P'
s'
B'1
i'
H'
β'
α'
H'
H'
EJERCICIO Nº3
s"
t"
t'
s'
SOLUCION


PARALELISMO
V"
α"
V"
V"
M
i"
s"
m"
t"
P"
β"
H"
H"
V'
P"
H"
V'
m'
V'
t'
P'
β'
P'
i'
s'
H'
α'
H'
H'
SOLUCION
EJERCICIO Nº4

Perpendicularidad.

TEOREMAS SOBRE PERPENDICULARIDAD

a.- Si una recta es perpendicular a un plano, lo es también a todas las rectas contenidas en dicho plano.

b.- **TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES.**
Si dos rectas son perpendiculares en el espacio, y una de ellas es paralela al plano sobre el que se proyecta, las proyecciones de ambas serán perpendiculares entre sí.

c.- Para que un plano sea perpendicular a otro, es necesario que lo sea a cualquier recta contenida en dicho plano.

d.- Para que una recta sea perpendicular a un plano, es necesario que las proyecciones de la recta sean perpendiculares a las trazas homónimas del plano.

e.- Cuando las dos proyecciones de una recta, sean, respectivamente perpendiculares a las trazas del mismo nombre, de un plano, la recta y el plano en el espacio serán perpendiculares.

f.- Si las proyecciones de dos rectas sobre uno de los planos de proyección son perpendiculares, y una de ellas es paralela al mismo, las rectas serán perpendiculares en el espacio.

g.- Si dos planos son perpendiculares en el espacio, y uno de ellos lo es también a uno de los de proyección, las trazas de ambas sobre éste último serán perpendiculares.

h.- Si un plano (α' α'') es perpendicular a uno de los de proyección, al vertical, por ejemplo, todo plano (β' β'') cuya traza sea perpendicular a α'', lo será también al plano α' α''.

EJERCICIOS DE PERPENDICULARIDAD

A.- En la figura 1, la recta t, que pasa por el punto P y cuyas proyecciones son t' y t'' es perpendicular al plano dado a ya que t' es perpendicular a α', y t'' lo es a α''.

B.- Problema Nº1, ver figura 2.

Por un punto dado P, trazar una recta t que sea perpendicular al plano definido por las rectas r y s.

a.- Trazamos el plano α, paralelo al horizontal y que corta al anterior, según la horizontal de plano h' h'', que pasa por los puntos 1 (1' 1'') y 2 (2' 2'').

b.- Por P', trazamos la proyección t' de la recta pedida, con la condición de que ésta sea perpendicular a h'.

c.- Similar a lo anteriormente dicho, pero usando un plano β paralelo al vertical y que corta al anterior según la frontal de plano f' f'', que pasa por los puntos 3 (3' 3'') y 4 (4' 4'') .

d.- La proyección vertical de la recta que pasa por P'' y es perpendicular al plano definido por las rectas r y s, será t'', perpendicular a f'', que une las proyecciones verticales de los puntos 3 y 4 es decir, 3'' y 4''.

C.- Problema nº2. Ver figura 3.

Por un punto dado P, trazar un plano α, que sea perpendicular a una recta dada t.

a.- Por el punto P trazaremos la frontal de plano f' f'', cuya traza horizontal es H', siendo f'' perpendicular a t''.

b.- Por H' trazaremos α', con la condición de que sea perpendicular a t', obteniéndose en la L.T. el punto M.

c.- Por M trazamos la perpendicular a t'' obteniéndose de esta forma la traza vertical α'' del plano pedido.

NOTA:

En la figura 4 tenemos el mismo caso de la figura 3, resuelto según la horizontal de plano h' h'', llegándose a la misma solución.

D.- Dos planos son perpendiculares entre sí, cuando uno de ellos contiene, al menos, una recta que sea perpendicular al otro.
(Este caso tiene infinitas soluciones).

E.- Problema nº3. Ver figura 5.

Por un punto dado P, trazar los planos β y π con la condición de que sean perpendiculares a otro plano dado α.

a.- Por el punto P se traza la recta t, perpendicular al plano dado α.

b.- Se obtienen las trazas de la recta t, es decir V'' y H'.

c.- Cualquier plano como el β y el π que contenga a la recta t , es perpendicular al plano dado a, ya que la recta t está contenida tanto en el plano b como en el plano π.

V'' está en β'' y π'' así como H' está en β' y π', es decir, la recta t está contenida tanto en el plano β como en el plano π.

F.- Rectas perpendiculares entre sí.

Normalmente, dos rectas perpendiculares en el espacio, se proyectan sobre un plano como dos rectas oblicuas, exceptuándose el caso en que una de ellas sea paralela a cualquiera de los planos de proyección.

NOTA: Dos rectas que se cortan y cuyas proyecciones sean oblicuas sobre los planos de proyección, pueden ser perpendiculares en el espacio.

G.- Problema nº4. Ver figura 6.

Por un punto dado P trazar una recta d con la condición de que sea perpendicular a otra recta dada t, y la corte.

a.- Por el punto P trazamos un plano α perpendicular a la recta dada t.

b.- Hallamos la intersección de la recta t con el plano α obteniéndose el punto Q de proyecciones Q' y Q''.

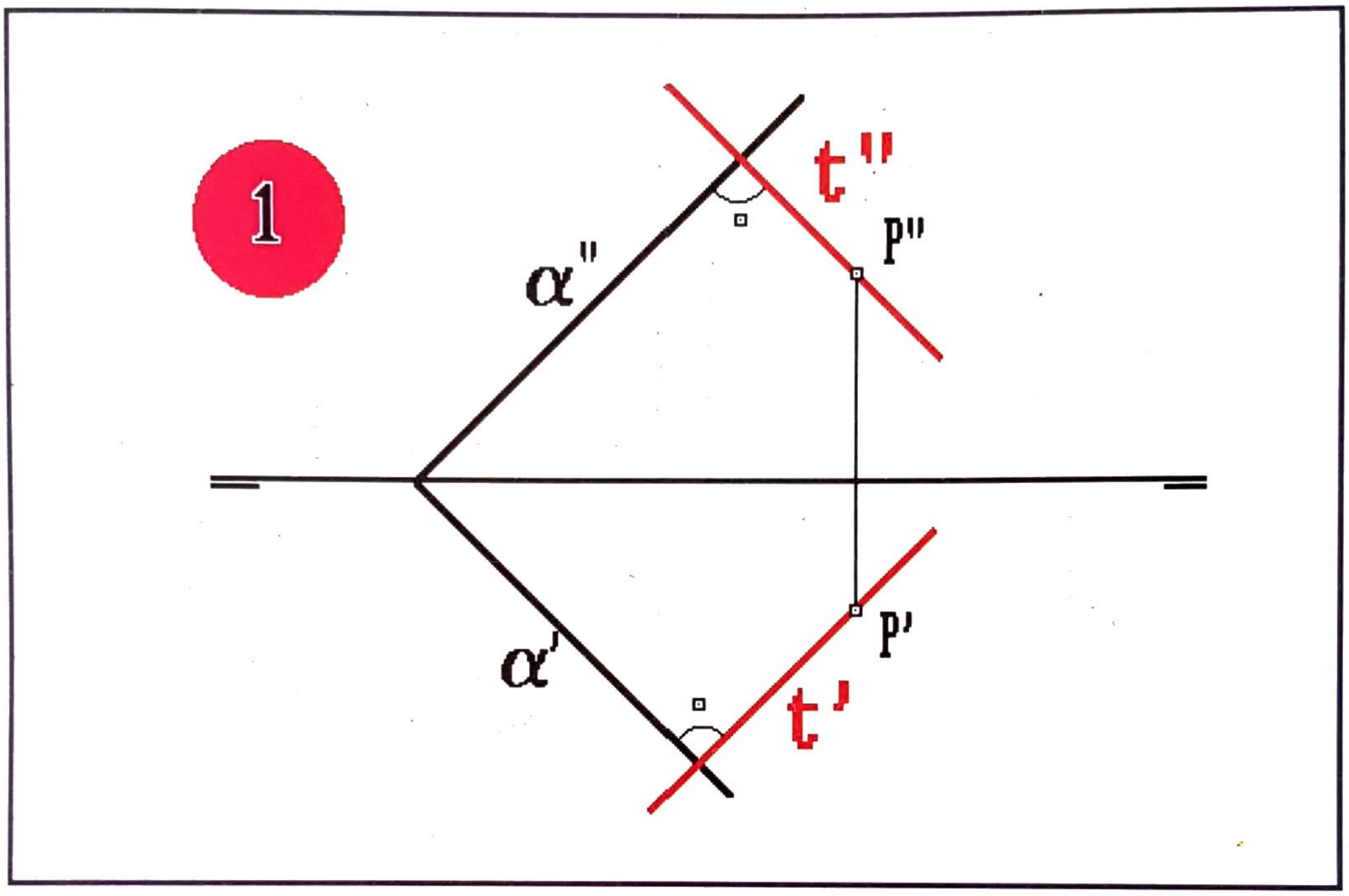
c.- Uniéndose los puntos P y Q obtendremos la recta d perpendicular a la recta dada t.

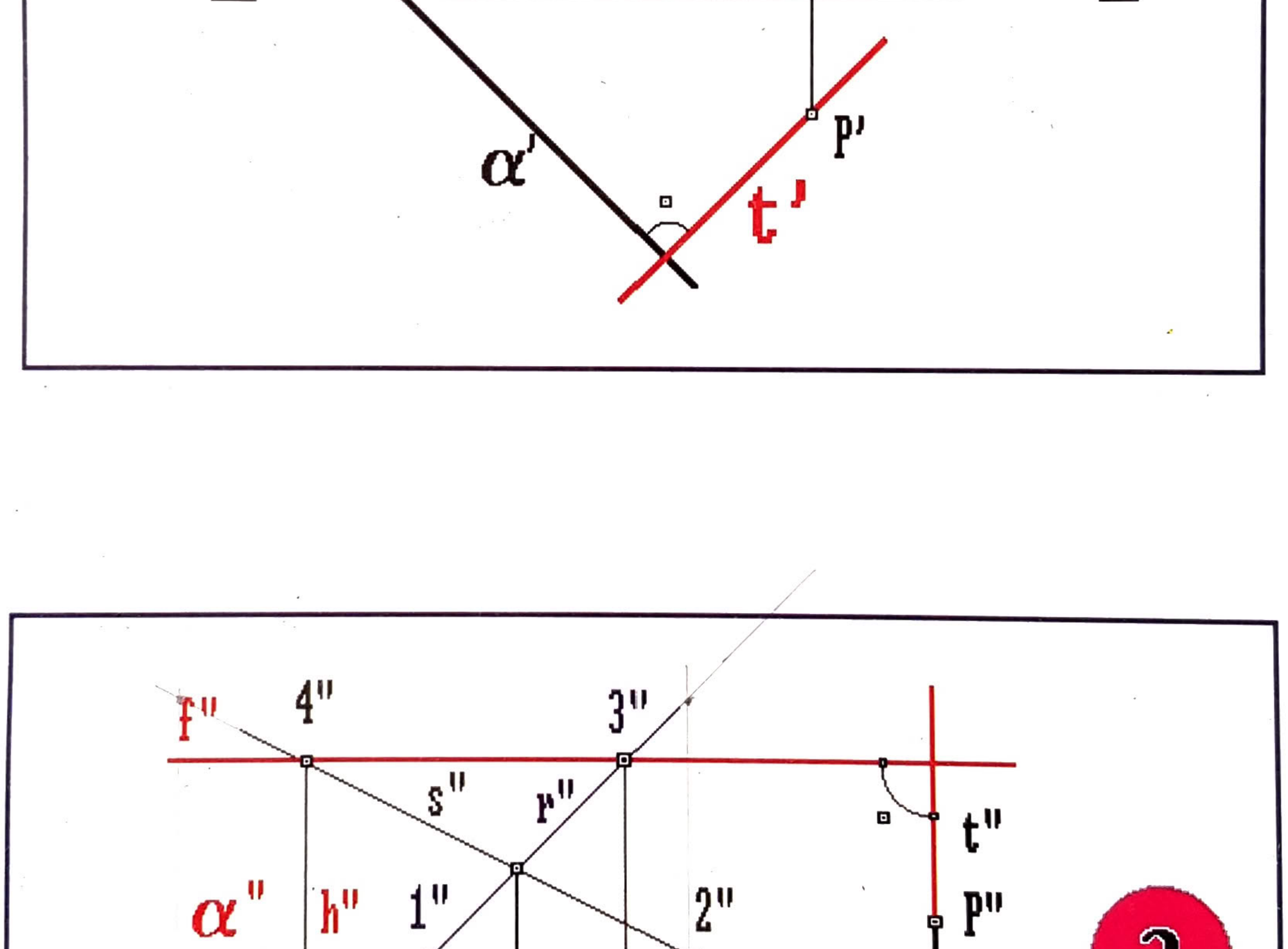
H.- Problema nº5. Ver figura 7.

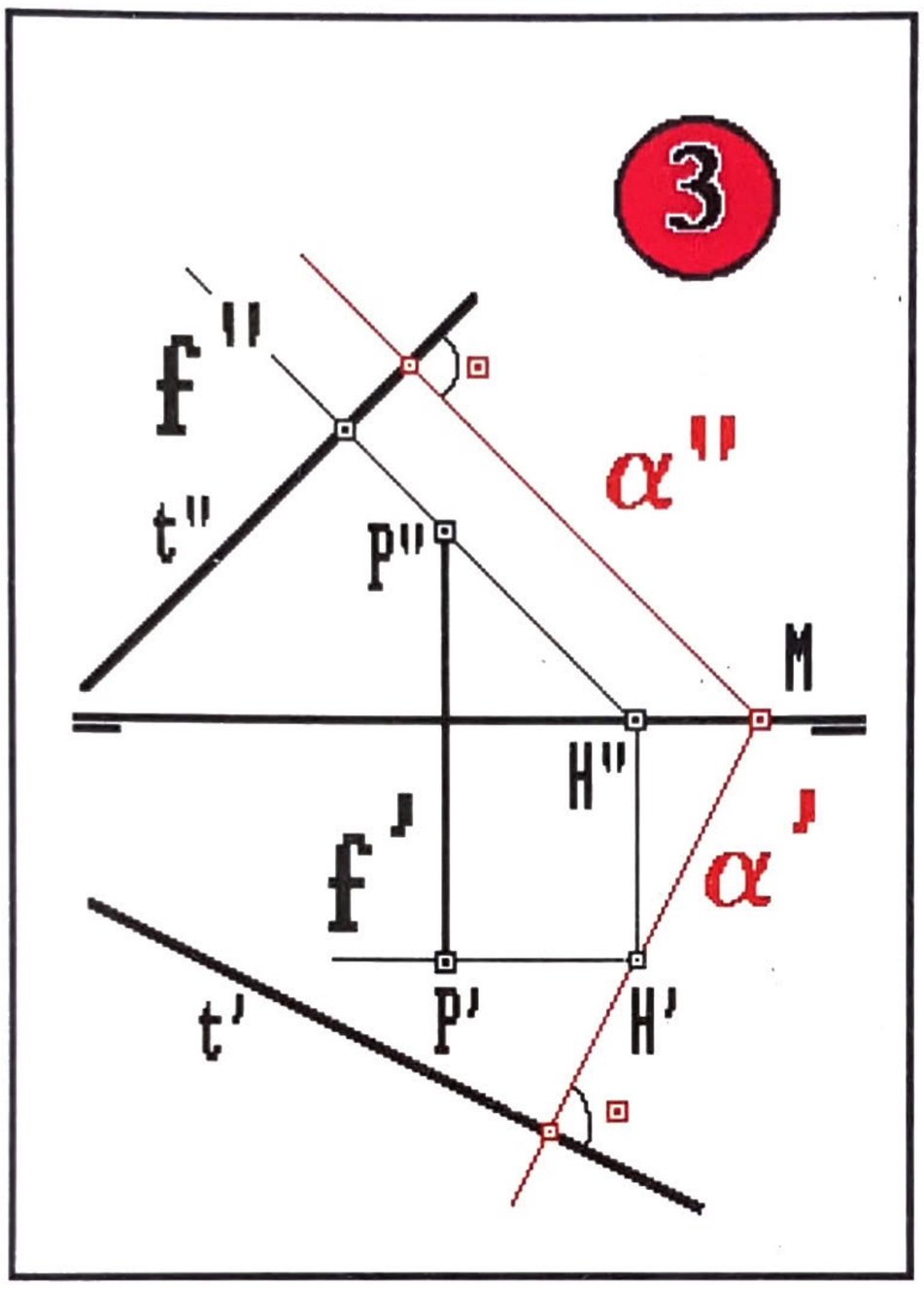
Por una recta dada t hacer pasar un plano β con la condición de que éste sea perpendicular a otro plano dado α.

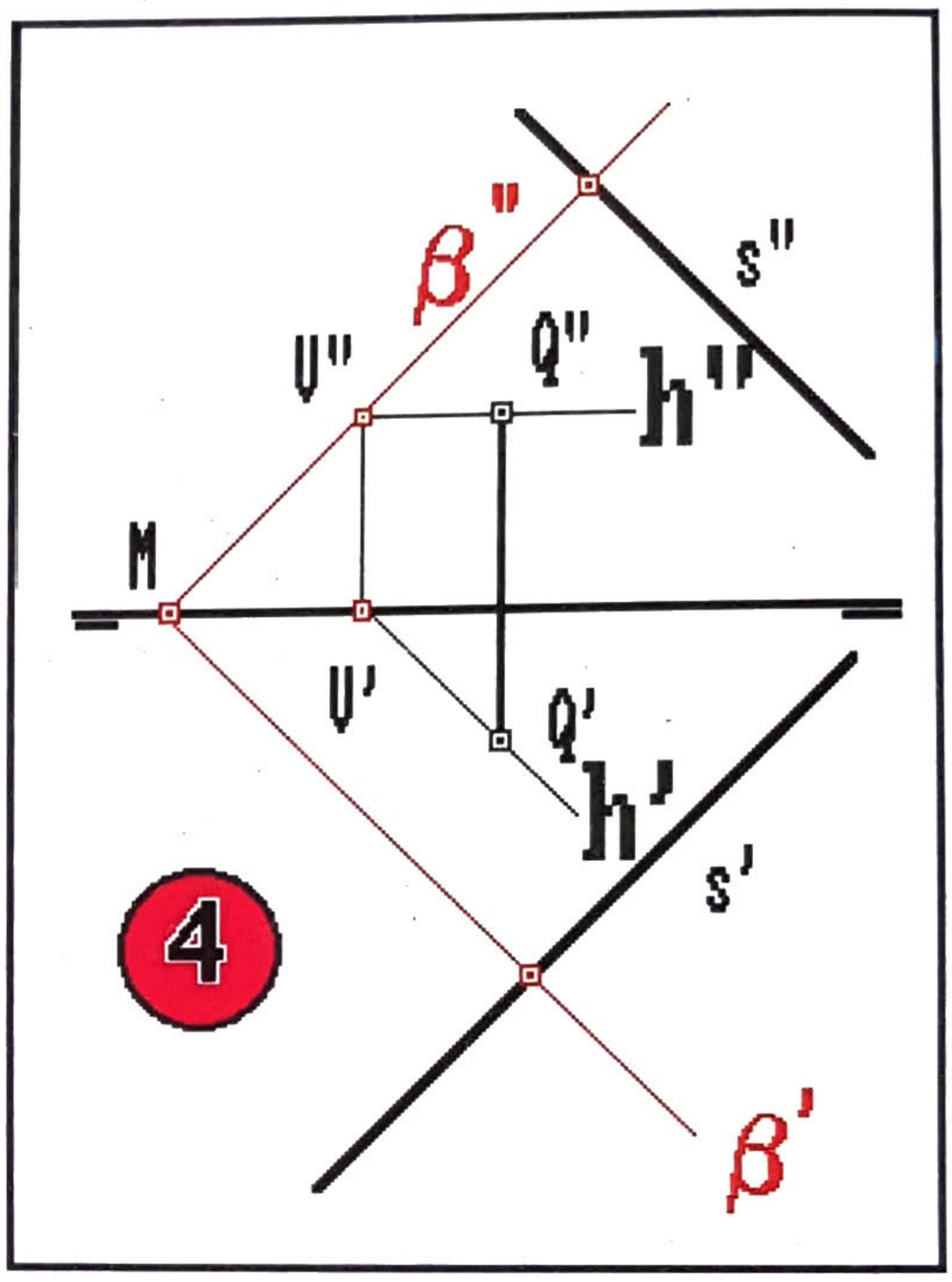
a.- Tomamos un punto P de la recta dada t por el que trazamos una recta s, perpendicular al plano dado α obteniéndose sus trazas H' y V''.

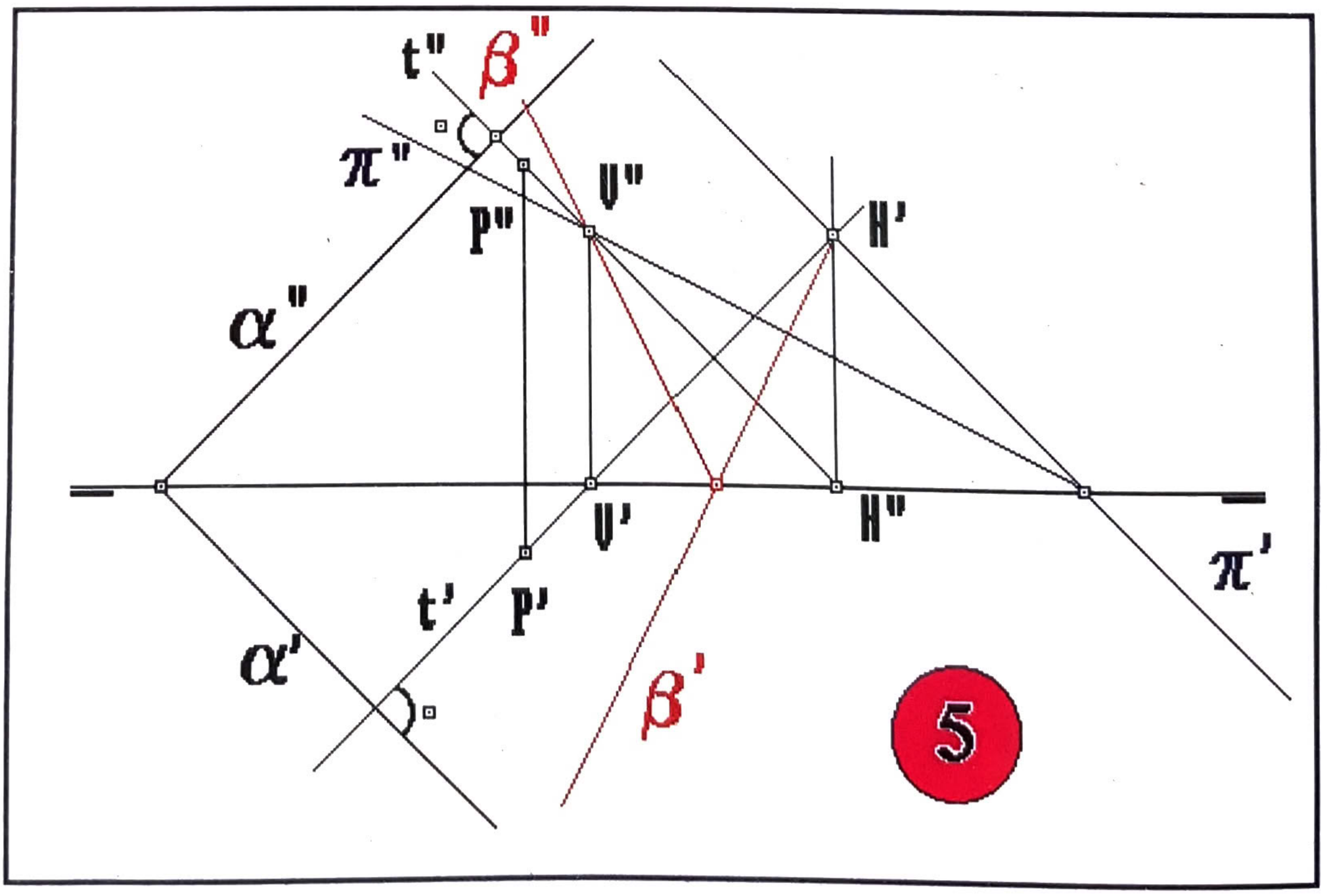
b.- Las trazas de la recta t unidas con las de la recta s, nos darán las proyecciones β' y β'', solución del problema propuesto.

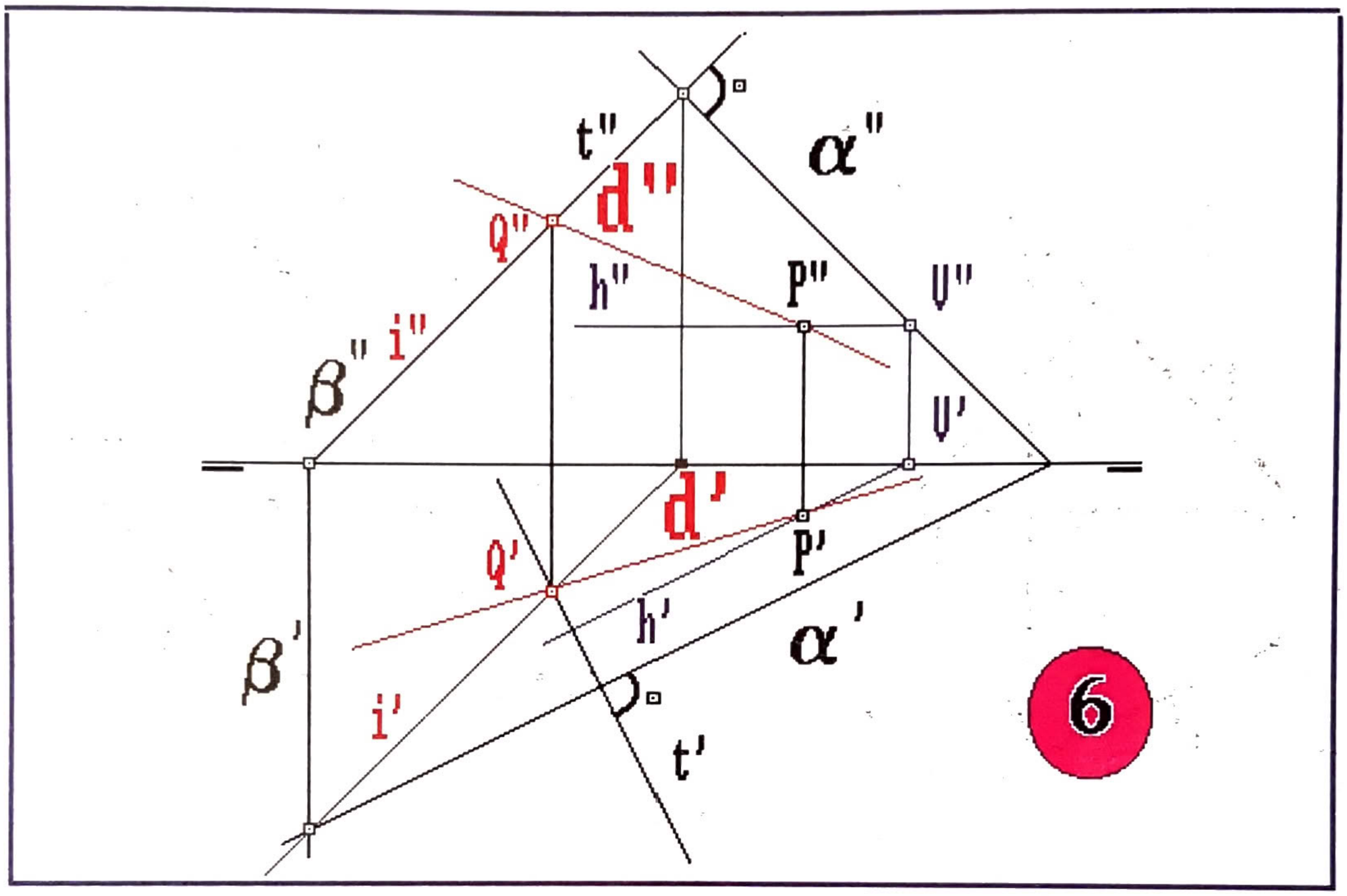

1
t"
P"
α"
α'
P'
t'

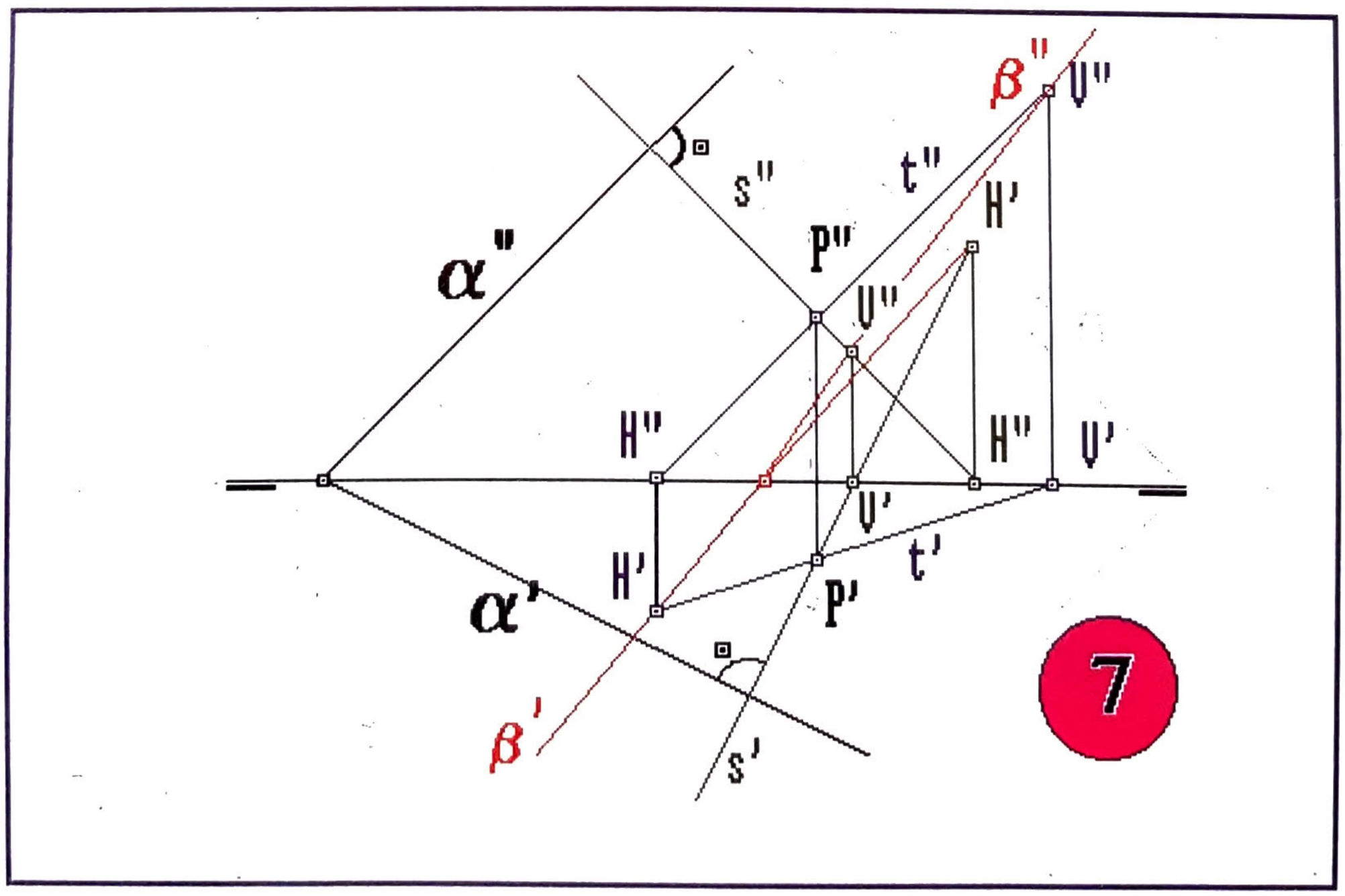

f"
4"
3"
s"
r"
t"
α"
h"
1"
2"
P"
2
f'
β'
4'
s'
r'
3'
P'
t'
h'
1'
2'


3
f''
t''
P''
α''
M
H''
f'
α'
t'
P'
H'


β''
s''
V''
Q''
h''
M
V'
Q'
h'
4
s'
β'


t''
β''
π''
V''
P''
H'
α''
V'
H''
π'
t'
P'
α'
β'
5


t"
α"
d"
q"
h"
P"
V"
β" i"
V'
d'
P'
q'
h'
α'
β'
i'
t'
6


β"
V"
s"
t"
α"
P"
H'
U"
H"
H"
V'
V'
t'
H'
P'
α'
7
β'
s'

Abatimientos.

ABATIMIENTOS

Algunos problemas de laboriosa resolución pueden realizarse con menores dificultades aplicándose el método de "abatimientos".

Al hablar de abatimientos, en general, nos referimos siempre al plano.

Cuando abatimos un plano, se abatirán con él todos los puntos y rectas contenidos en dicho plano.

Abatir un plano consiste en girarlo alrededor de cualquiera de sus trazas, hasta hacerlo coincidir con alguno de los planos de proyección.

La traza del plano que utilizamos como eje de giro la denominaremos "charnela".

El método de abatimientos, es muy común en descriptiva, ya que resuelve multitud de casos, como; hallar distancias, verdaderas magnitudes, determinar ángulos, etc.

FIG. Nº1.

El rectángulo T de vértices 1-2-3-4 está contenido en un plano α, proyectante horizontal, su proyección horizontal es el segmento l, y su proyección vertical, la proyección ortogonal del rectángulo T.

Esta proyección queda desvirtuada, ya que el plano α, no es paralelo al plano vertical y consecuentemente el lado L se proyectará con una dimensión menor de la real.

FIG. Nº2.

En el sistema diédrico hemos representado la fig. nº1, pudiéndose observar, cómo la verdadera dimensión de los lados 12 y 34, sólo se representa en la proyección horizontal, como L, mientras que en la proyección vertical, el valor de dichos lados se representa como l; siendo $l<L$.

FIG. Nº3.

En la fig. nº3, hemos realizado el abatimiento del plano proyectante horizontal α, de la fig. nº1.

Hemos utilizado como "charnela" la traza vertical α", de esta forma la traza horizontal α' gira desde el punto O sobre el plano horizontal hasta hacerlo coincidir con el plano VS.

De esta forma el rectángulo T de lados h y L queda en su verdadera magnitud en el plano vertical.

FIGS. Nº4 A Nº6.

En estas 3 figs. hemos resuelto un caso similar al anterior, con la diferencia de que el rectángulo P está contenido en un plano proyectante vertical, y éste ha sido abatido sobre el plano horizontal tomando como charnela la traza horizontal α' del plano α.

En la fig. nº6 podemos observar sobre el plano horizontal la verdadera magnitud del rectángulo P de lados L y h.

FIGS. Nº7 Y Nº8.

En el caso de planos paralelos a L.T. (o que pasan por L.T.) las proyecciones de cualquier fig. contenida en ellos, no se representarán en verdadera magnitud en ninguno de los planos de proyección.

Esto quedará resuelto abatiendo dicho plano sobre cualquiera de los planos de proyección; horizontal, vertical o de perfil.

En la fig. nº7 el rectángulo F contenido en el plano α paralelo a L.T. queda proyectado según el rectángulo F_1 en el plano horizontal, F_2 en el plano vertical y según el segmento F_3 en el plano de perfil P.

En ningún caso podemos conocer la verdadera dimensión del rectángulo F. Al mismo resultado llegamos en el sistema diédrico; (fig. nº8).

FIG. Nº9.

Para obtener la verdadera dimensión del rectángulo F, lo hemos resuelto por el método de abatimiento de planos.

En este caso hemos tomado como charnela la traza horizontal α' quedando la traza α'' abatida sobre el plano horizontal.

Los lados 14 y 23, en su proyección tanto horizontal como vertical, no se proyectan en su verdadera magnitud.

En el plano α abatido limitado por las trazas α' y α''_0 se representa el rectángulo F_0 en su verdadera magnitud ya que sus lados 14 y 23 son iguales a "b", representada en verdadera magnitud en el plano de perfil.

FIG. Nº10.

Aquí, tenemos el caso de abatir un punto P, contenido en un plano oblicuo α, sobre el plano horizontal de proyección.

Conocemos las trazas α' y α'' del plano, y las proyecciones P' y P'' del punto P contenido en dicho plano.

a.- Por P' trazamos la perpendicular a la traza a' que la cortará en el punto O.

b.- Sobre S' y desde P' trazamos el valor h (cota del punto P) obteniéndose el punto A.

c.- Con centro en O y radio r, igual al segmento OA, trazamos un círculo que cortará a la perpendicular indicada en el apartado a.-, en los puntos P_0.

P_0, es la solución del abatimiento del punto P contenido en el plano α, sobre el plano horizontal.

NOTA: El plano α puede ser abatido hacia detrás o hacia delante, por dicho motivo, existen 2 soluciones P_0.

FIGS. Nº11 Y Nº12.

En la fig. nº12 hemos abatido el plano α, sobre el plano horizontal de proyección. Los pasos a seguir en el orden indicado por los números 1-2-3.

a.- Trazamos un plano β, proyectante horizontal con la condición de que su traza horizontal β' sea perpendicular a la traza α' del plano α.

(Pasos 1 y 2).

b.- Con centro en P intersección de las trazas α' y α'', trazamos un círculo, de radio PV'' que cortará en V''_0 a β' (paso 3).

c.- La traza α'' abatida sobre el plano horizontal de proyección será PV''_0.

En la fig. nº11 hemos obtenido el abatimiento del plano α así como el del punto P contenido en dicho plano.

En el abatimiento del plano hemos seguido el procedimiento explicado en la fig. nº12.

Para obtener la proyección abatida del punto P sobre el plano horizontal actuaremos de la siguiente forma:

a.- Por P' trazamos una paralela a la traza α' hasta que corte a L.T. en V'.

b.- Por V' trazamos una perpendicular a α' hasta que corte a α''_0 en el punto V''_0.

c.- Por V''_0 trazamos una paralela a α'.

d.- Por P' trazamos una perpendicular a α'.

e.- Las dos rectas anteriores se cortarán en P_0 solución del problema propuesto.

FIGS. Nº13 Y Nº14.

En estas figs. hemos abatido un segmento t y un triángulo 1-2-3 respectivamente siguiendo el procedimiento indicado anteriormente.

FIG. Nº15.

En el caso de un círculo contenido en un plano α, sus proyecciones serán elipses.

Si pretendemos representar las proyecciones de un círculo contenido en un plano comenzaremos por abatir el plano sobre cualquiera de los de proyección, en nuestro caso sobre el plano horizontal.

Una vez representado el círculo lo cortamos por dos diámetros perpendiculares entre sí, con la condición de que uno de ellos sea paralelo a la traza horizontal del plano, de esta forma obtendremos los puntos 1, 2, 3 y 4.

Efectuamos el desabatimiento para obtener las proyecciones 1' 2' 3' 4' y 1" 2" 3" 4" puntos de las proyecciones horizontales y verticales de la elipse.

Nota: En el caso de 1"2"3"4" los segmentos 1"3" y 2"4" nos darán los diámetros conjugados, en la proyección horizontal. 1' 3' y 2' 4' son los ejes reales de la elipse.

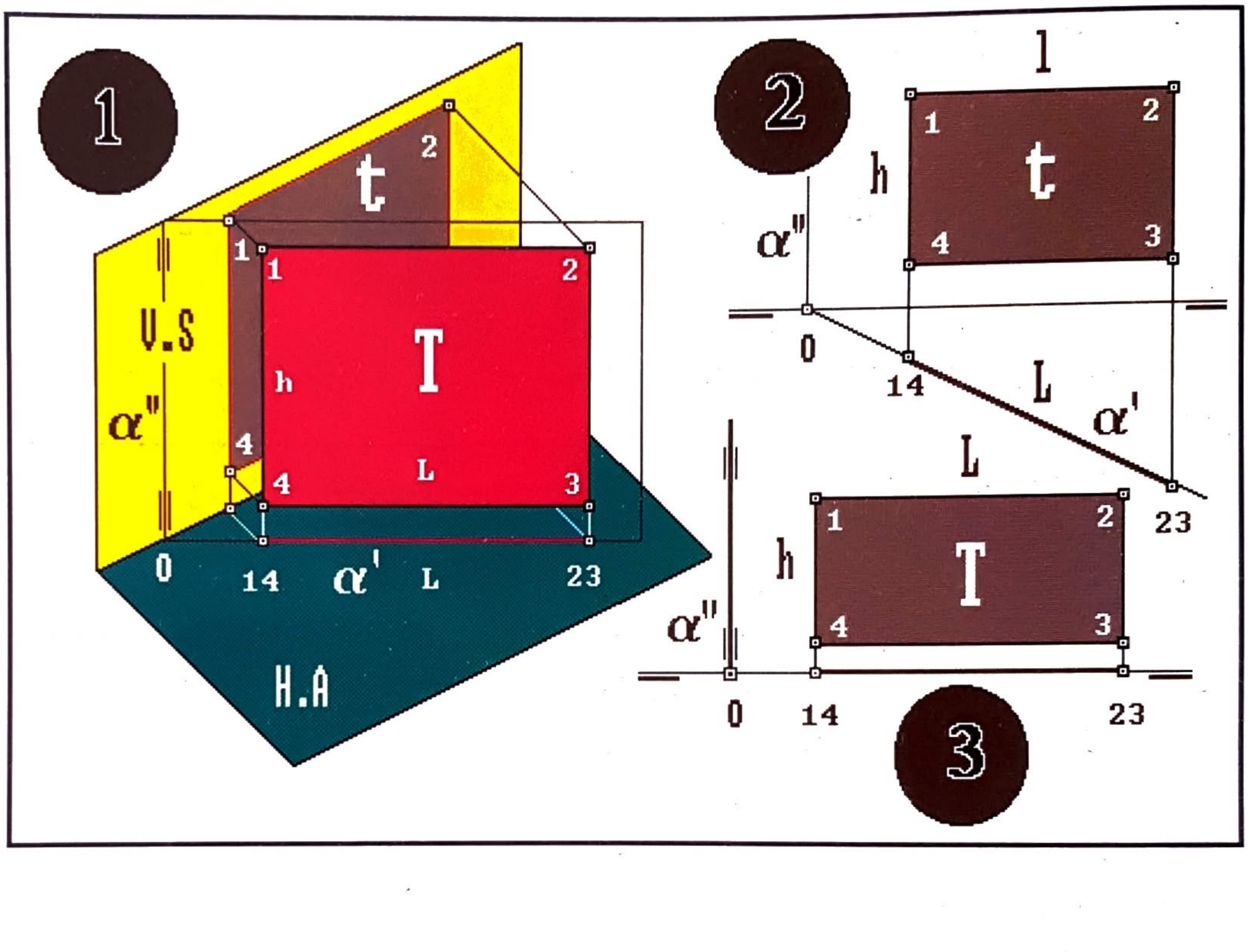
Si abatimos el plano α sobre el plano vertical nos dará cuatro puntos en dicho plano, que definen los ejes reales de la elipse, y otros cuatro sobre el plano horizontal siendo en este caso los extremos de los ejes conjugados.

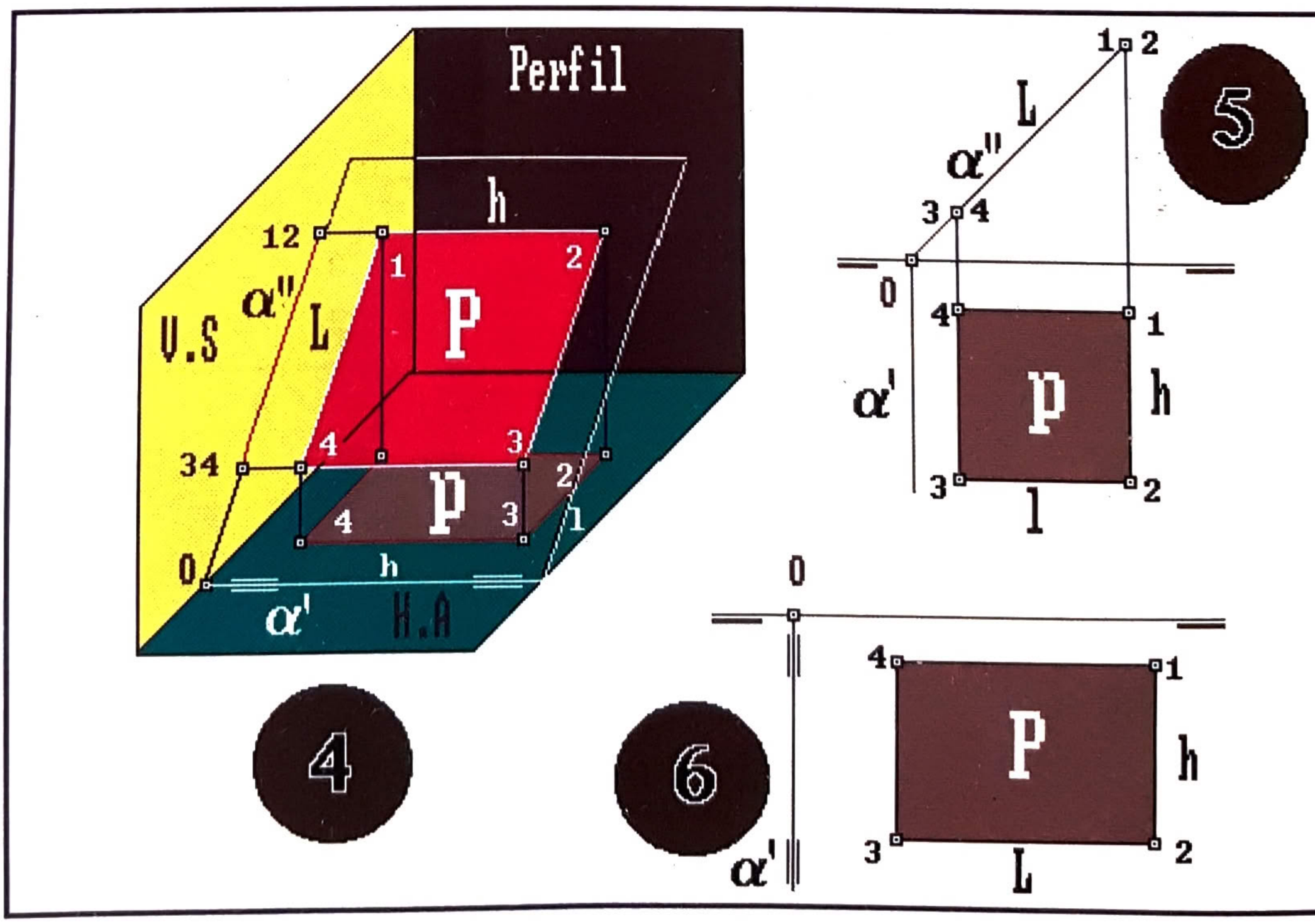
FIG. Nº16.

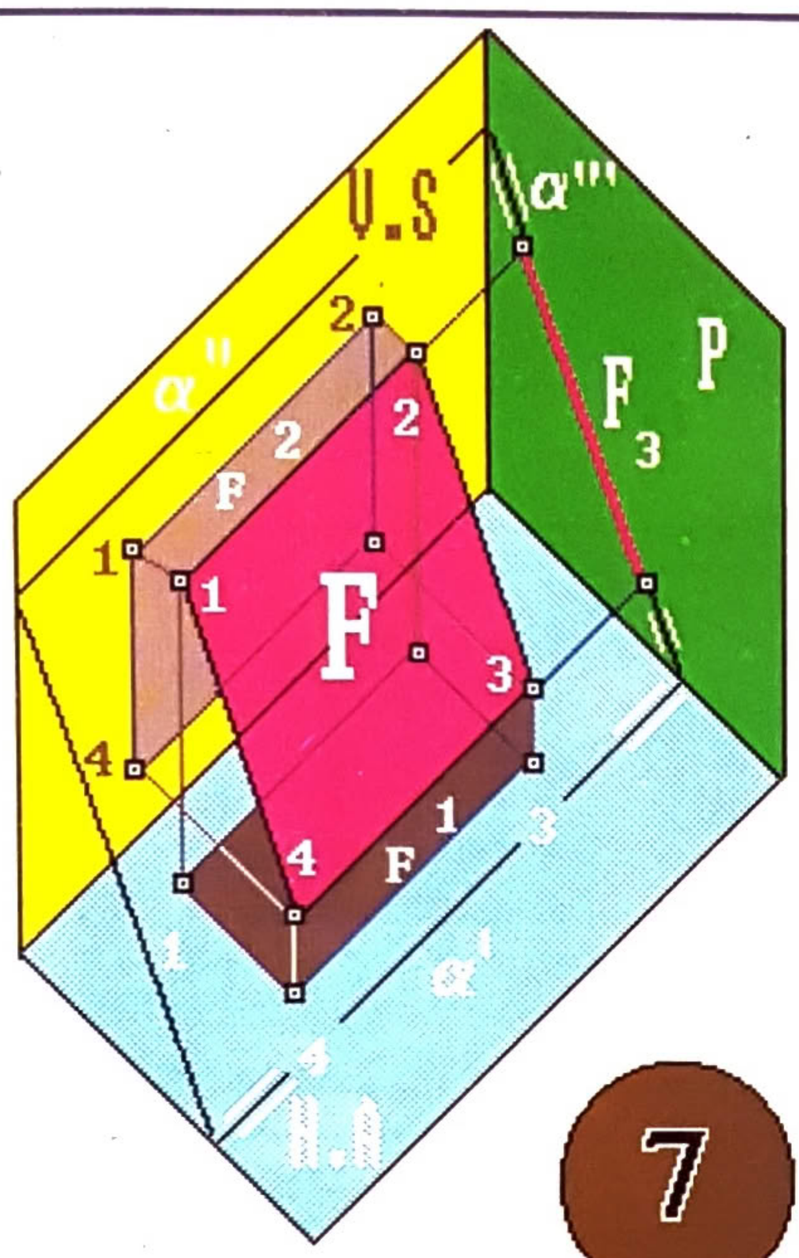
Es el mismo caso de la fig. nº9 habiéndose seguido otro procedimiento para abatir el plano α sobre el plano horizontal.

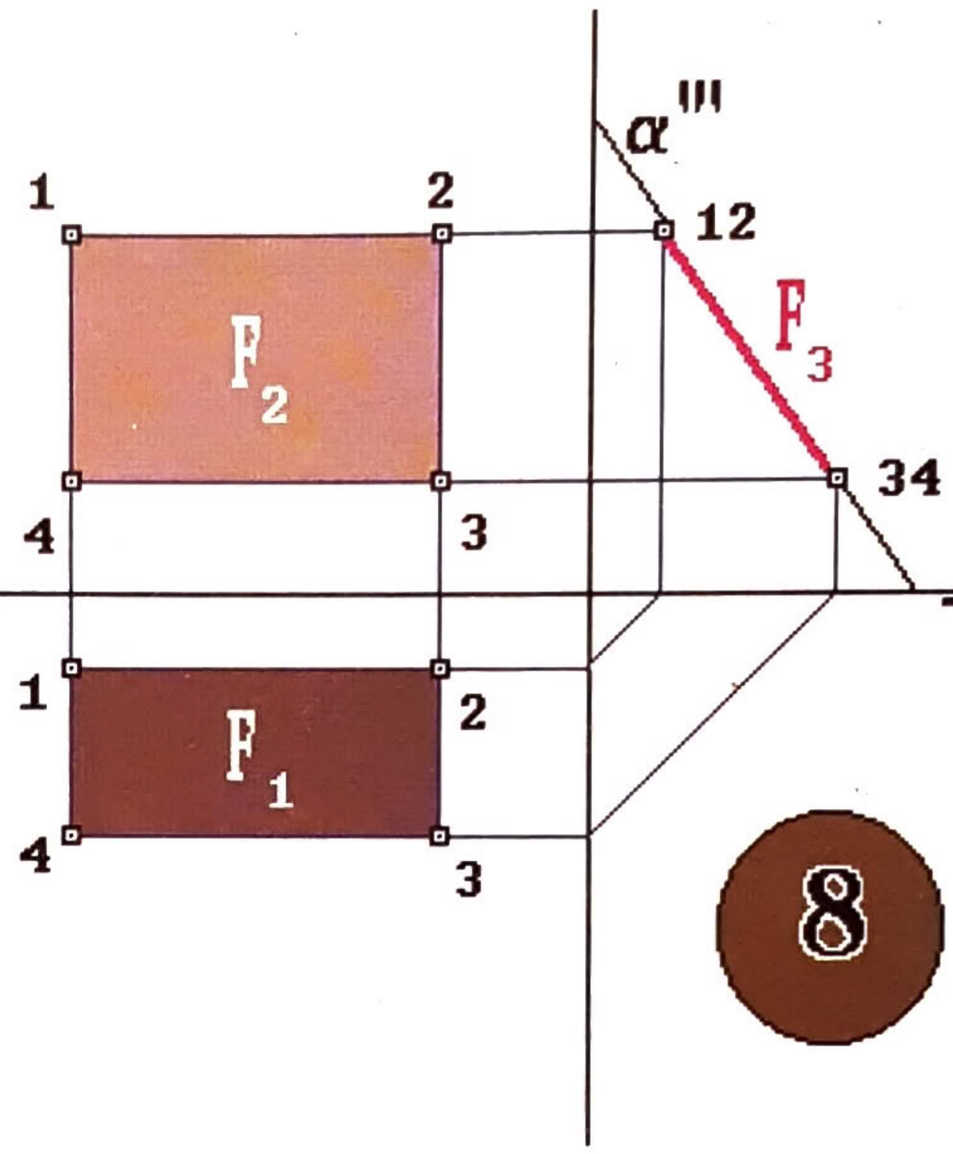
FIGS. Nº17, Nº18 Y Nº19.

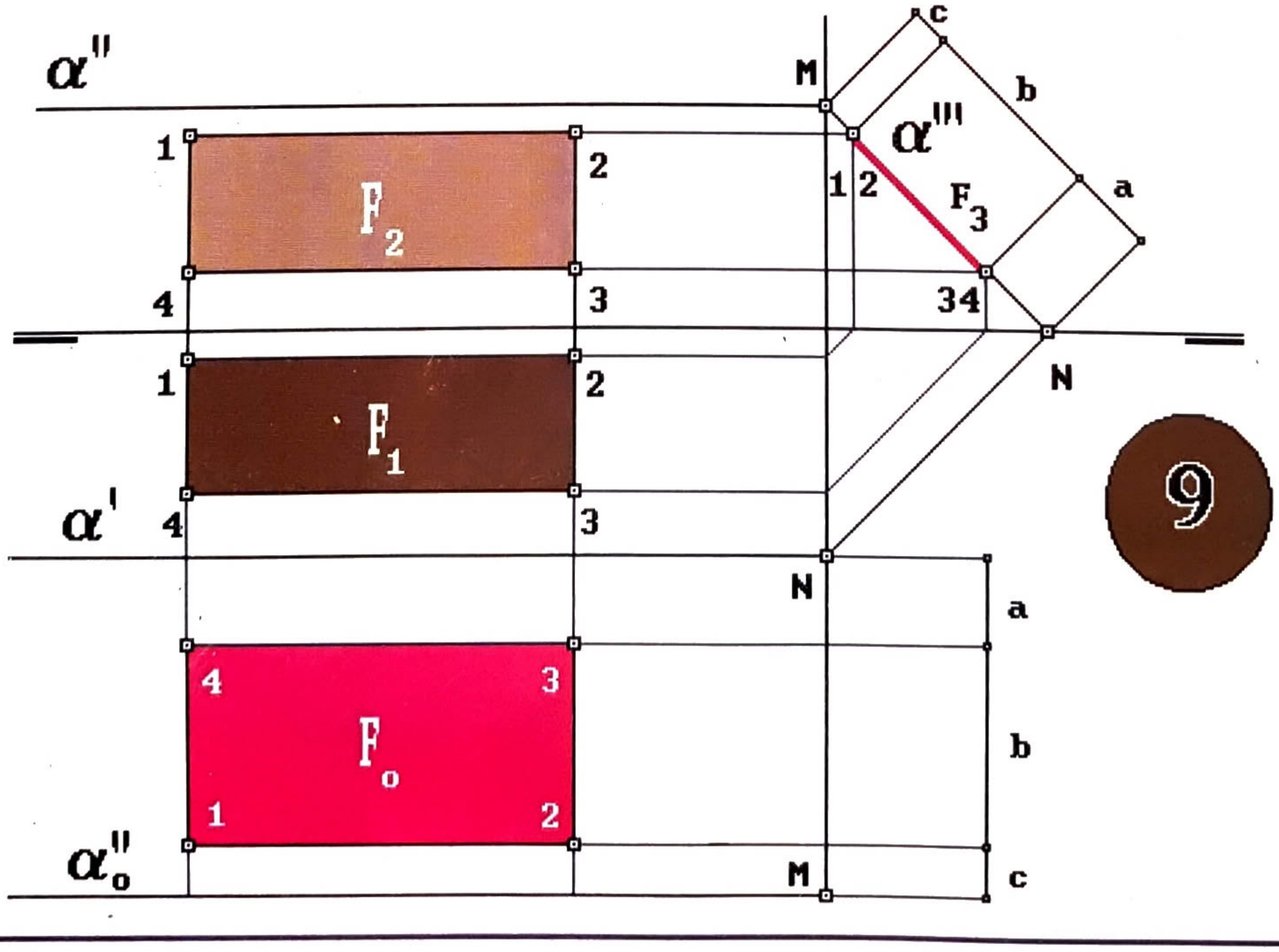
En estas figs. hemos representado las proyecciones horizontales y verticales de un cuadrado, círculo y triángulo conocidos y situados en planos proyectantes horizontales.


1
t
2
1
1
2
V.S
T
h
α"
4
4
L
3
0
14
α'
L
23
H.A
2
l
1
2
h
t
4
3
α"
0
14
L
α'
23
L
1
2
h
T
α"
4
3
0
14
23
3

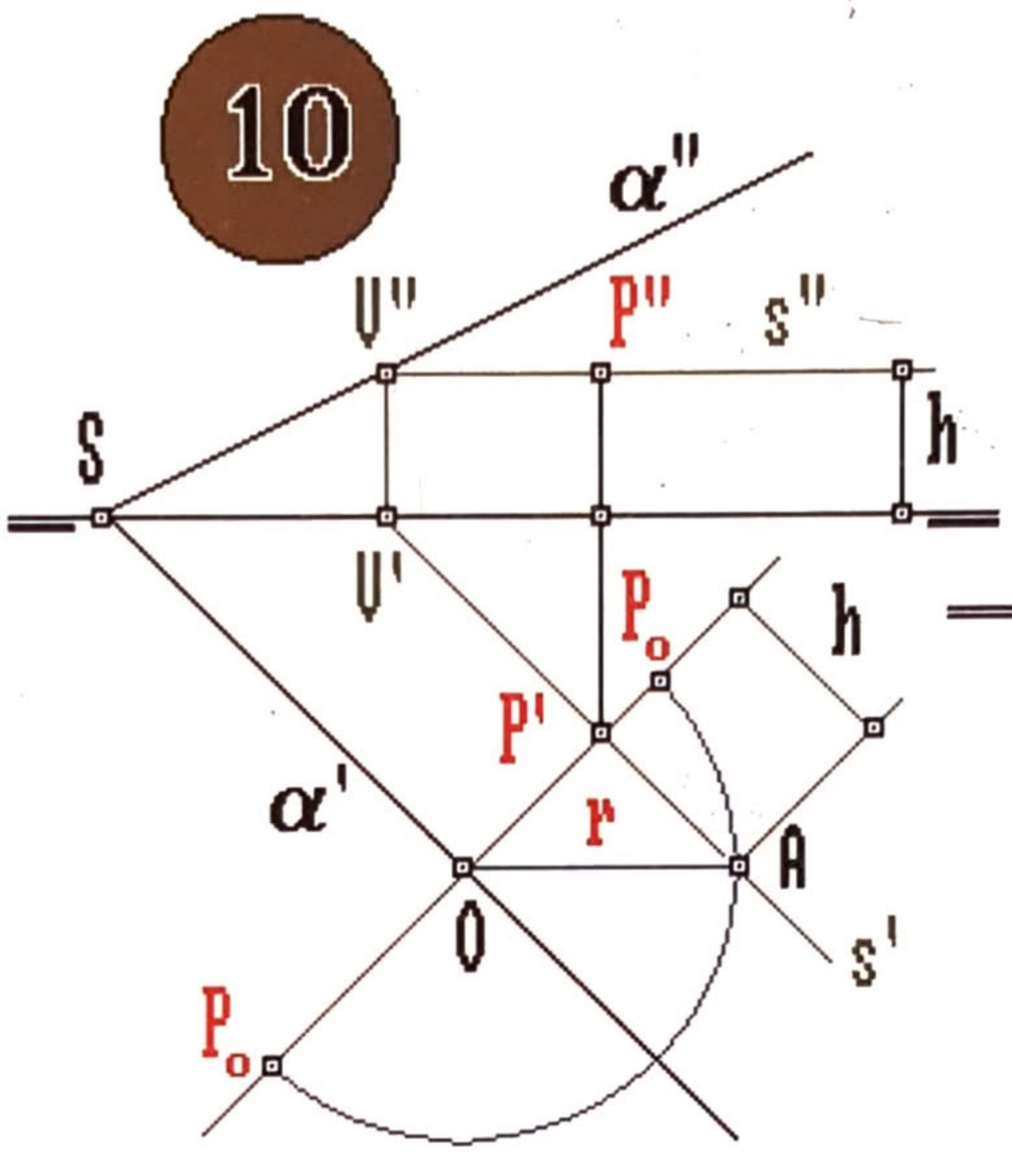

Perfil
h
12
1
2
V.S
α"
L
P
34
4
3
p
4
3
2
1
0
h
α'
H.A
4
1 2
L
α"
3 4
0
4
1
α'
p
h
3
2
l
5
0
4
1
P
h
3
2
L
α'
6


V.S
α'''
α''
P
F
F3
1
2
3
4
α'
7

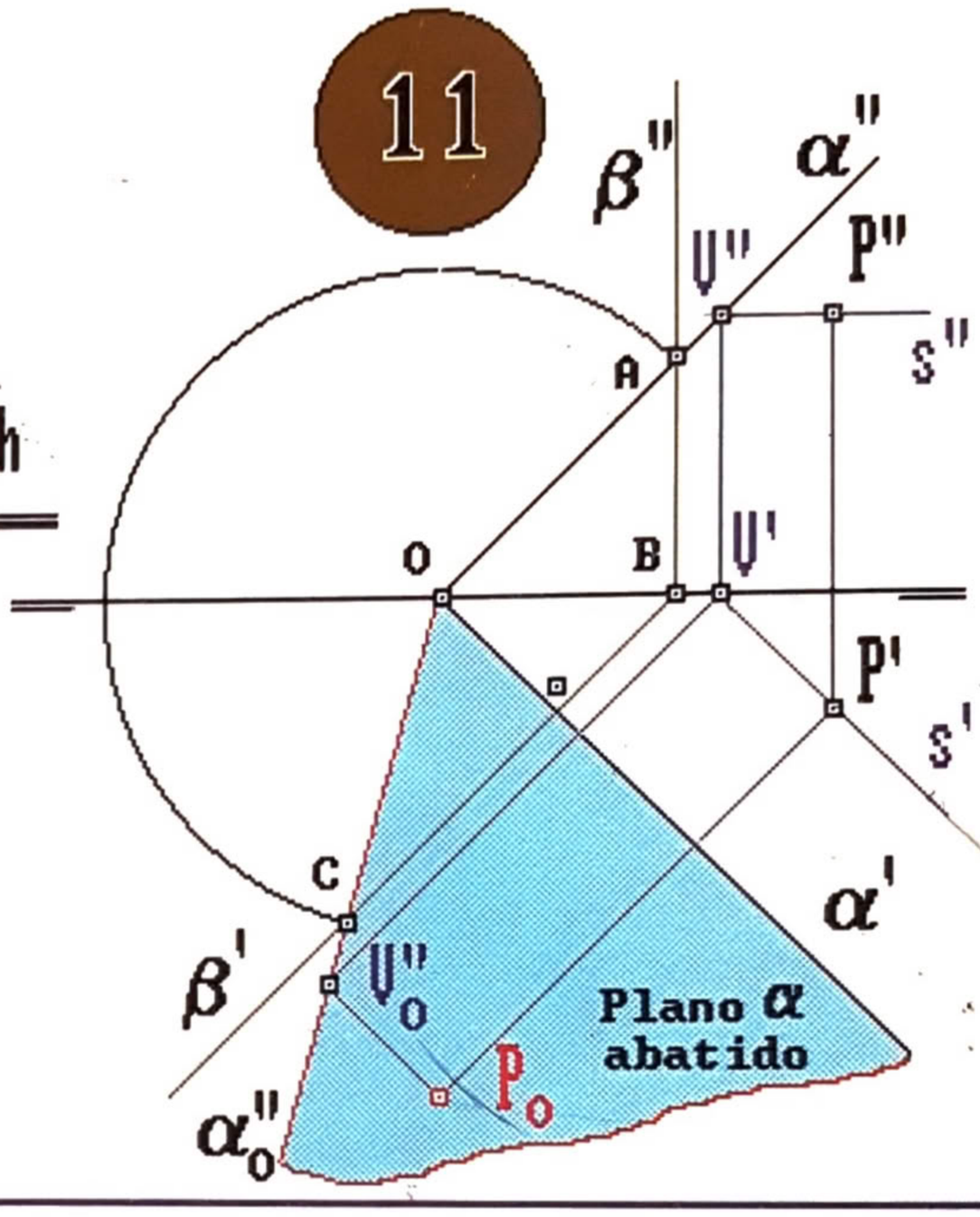

α'''
1
2
12
F2
F3
34
4
3
F1
8

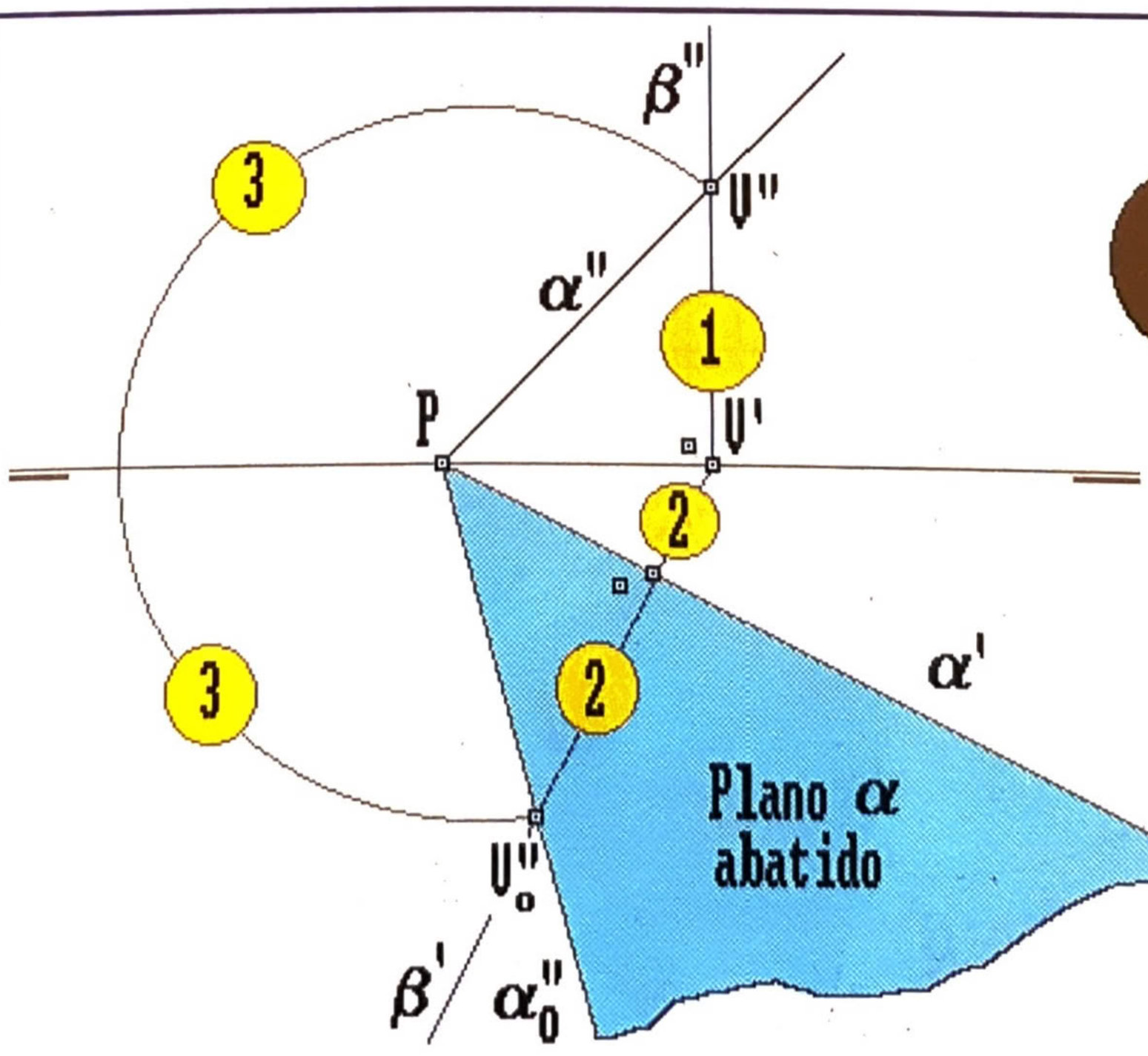

α''
M
c
b
α'''
1
2
F2
F3
a
4
3
34
N
9
α'
N
a
4
3
Fo
b
1
2
α''o
M
c

10

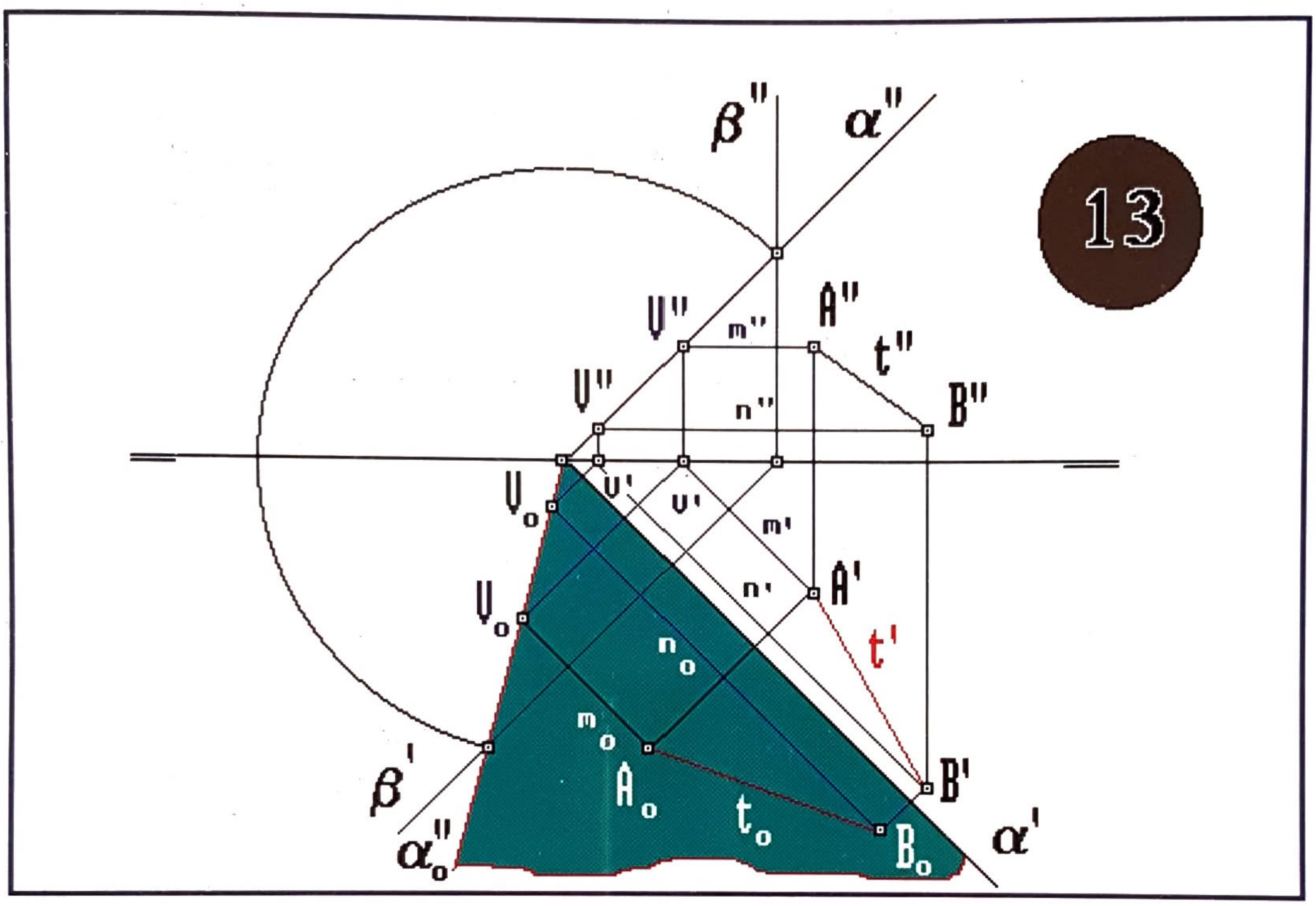

α''
V''
P''
s''
S
h
V'
P'
P₀
α'
r
A
O
s'
P₀

11

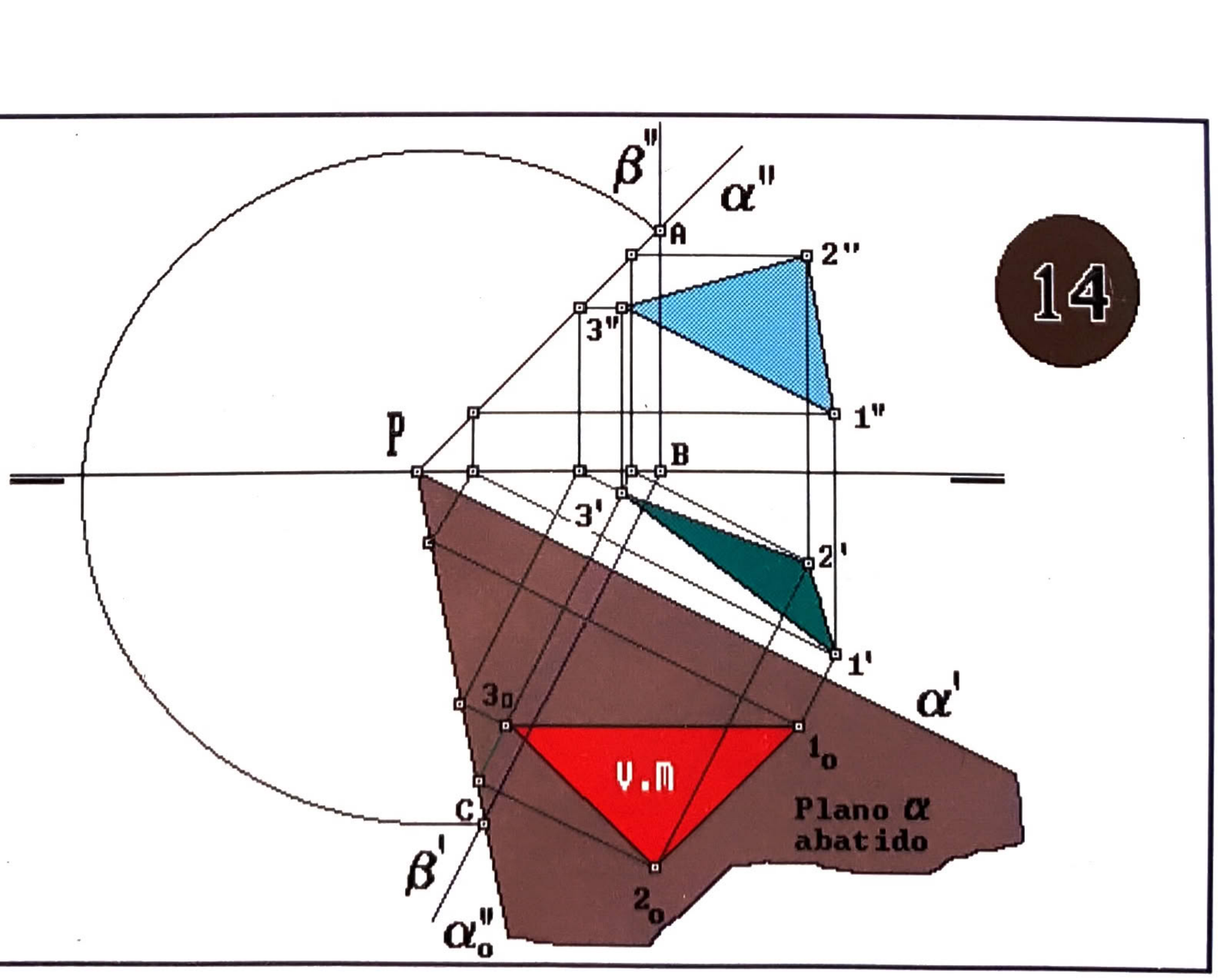

β''
α''
V''
P''
A
s''
o
B
V'
P'
s'
C
α'
β'
V''₀
Plano α
abatido
P₀
α''₀


β''
3
V''
α''
1
P
V'
2
3
2
α'
Plano α
abatido
V''₀
β'
α''₀

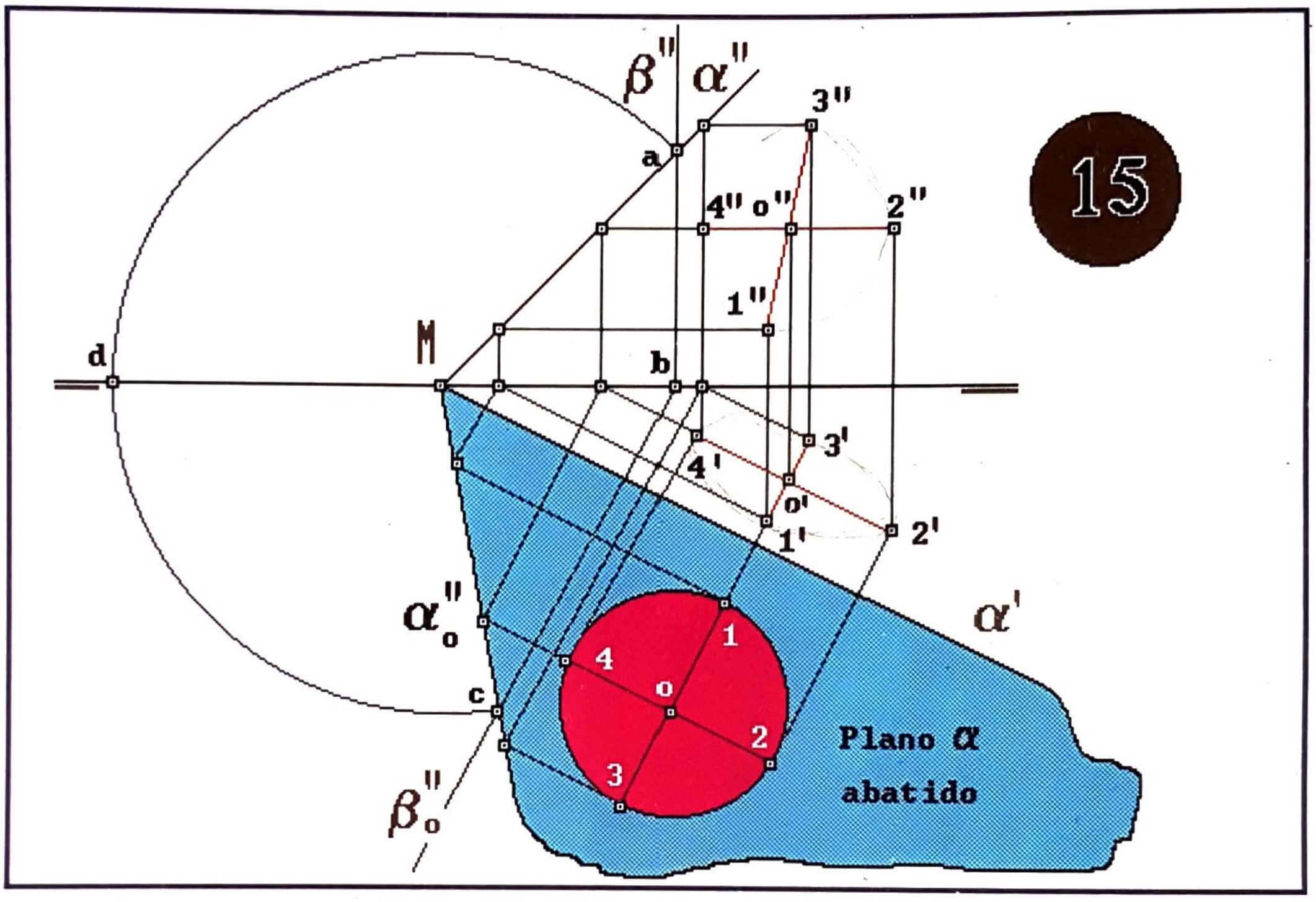
12


β"
α"
V"
m"
A"
t"
V"
n"
B"
V₀
v'
v'
m'
n'
A'
V₀
t'
n₀
m₀
β'
A₀
t₀
B'
α₀"
B₀
α'

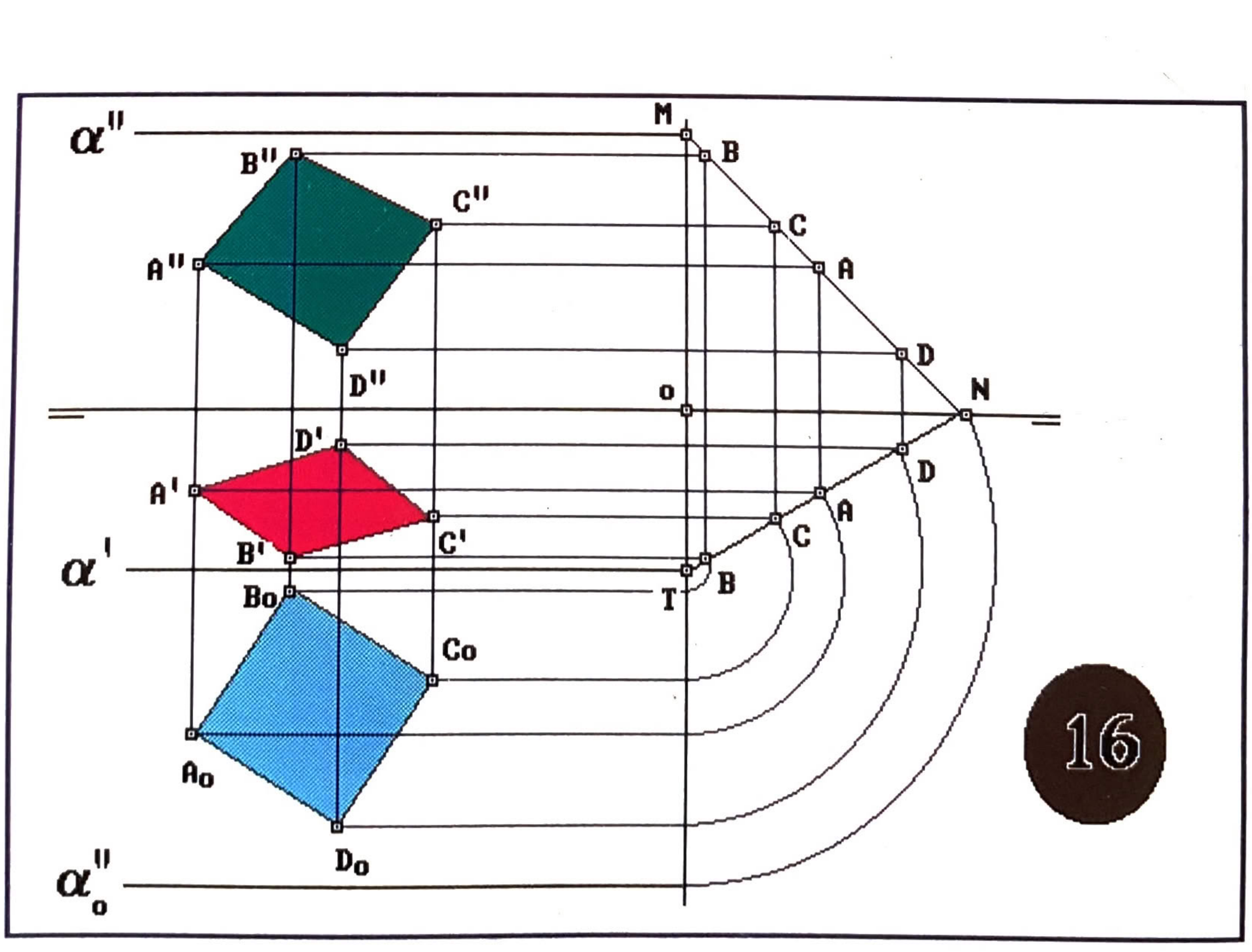
13


β"
α"
A
2"
3"
P
1"
B
3'
2'
1'
3₀
α'
1₀
V.M
C
Plano α
abatido
β'
2₀
α₀"

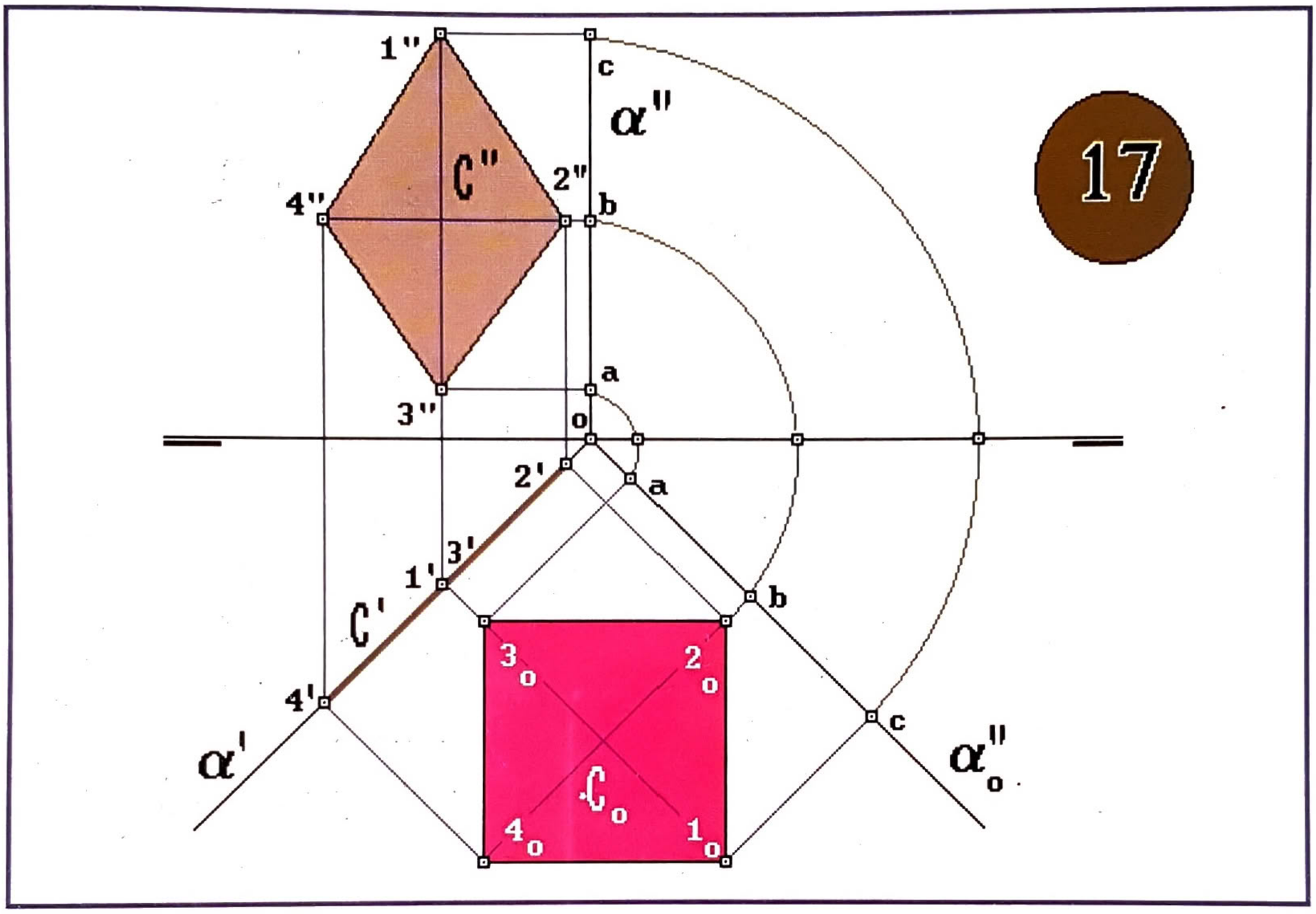
14

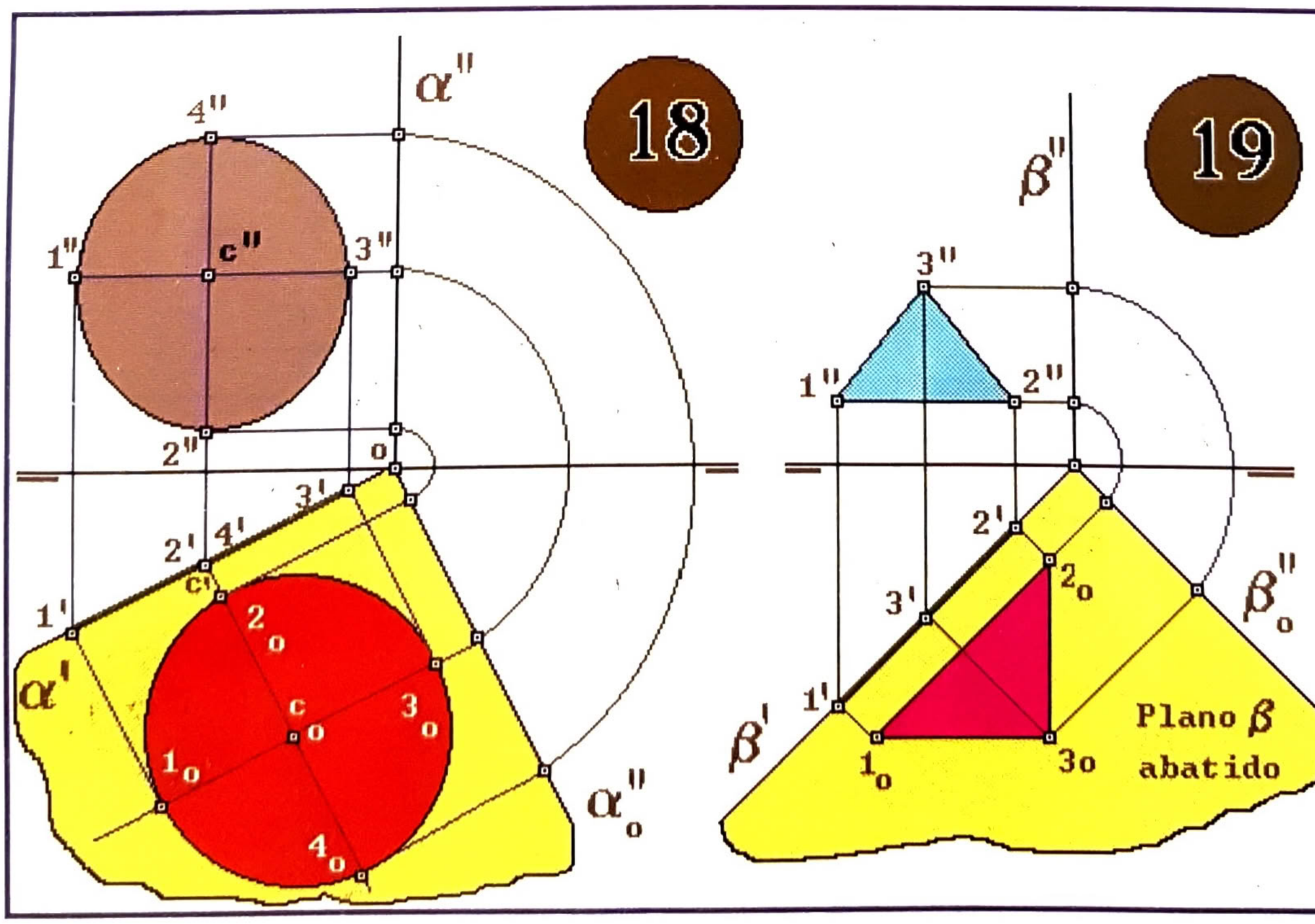

β''
α''
3''
a
4'' o''
2''
1''
M
d
b
3'
4'
o'
1'
2'
α''o
α'
1
4
o
2
3
c
Plano α
abatido
β''o

15


α''
M
B''
B
C''
C
A''
A
D
D''
o
N
D'
A'
D
A
C
C'
B'
α'
B
T
Bo
Co
Ao
Do
α''o

16


17
1"
c
α"
C"
2"
4"
b
a
3"
o
2'
a
1'
3'
C'
b
3o
2o
4'
c
α'
α"o
4o
Co
1o


18
α"
4"
1"
c"
3"
2"
o
3'
2'
4'
c'
1'
α'
2o
c
o
3o
1o
4o
α"o
19
β"
3"
1"
2"
2'
2o
3'
β"o
1'
β'
1o
3o
Plano β
abatido

Distancias.

DISTANCIAS.

HALLAR LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DADOS **A** Y **B**.

(ver figura nº 1).

Sean **A** y **B**, los puntos del espacio, cuyas proyecciones son A' y B', las cuales determinan la proyección horizontal, d', de la distancia, d, entre los puntos dados A y B.

Por B trazamos una paralela al plano horizontal, formándose un triángulo rectangulo, BPA, cuyos catetos son, h y d'.

En el sistema diédrico, (ver figuras 2 y 3), las proyecciones de los puntos son A', B' y A", B", d' y d" son las proyecciones horizontal y vertical de la distancia entre los puntos A y B.

Para obtener la verdadera magnitud de la distancia trazaremos por A" la perpendicular a d" y sobre ésta, se llevará el valor de h, igual a la diferencia de alejamientos entre las proyecciones A' y B'.

(ver figura nº 2).

En la figura nº 3, hemos llegado a la misma conclusión, pero llevando la diferencia de cotas entre las proyecciones A" y B" a la proyección horizontal.

En la figura nº 4, hemos seguido el mismo método que en la figura nº 3, con la única diferencia de que al estar los puntos en distintos cuadrantes hay que considerar las cotas y los alejamientos con los dos signos, es decir: el valor de h será el comprendido entre la línea de tierra y B" más (+) el comprendido entre línea de tierra y A".

HALLAR LA DISTANCIA DE UN PUNTO (P), A UN PLANO DADO (α).

(ver figura nº 5).

Por las proyecciones P' y P" del punto dado P se trazan las proyecciones t' y t" de la recta t, con la condición de que éstas sean perpendiculares a las trazas α' y α'' del plano dado α. (ver figura nº 6).

Veamos la figura nº 7; por la recta t haremos pasar, el plano proyectante vertical, β' β", que cortará al plano dado α, en la recta intersección, i' i".

El punto Q' Q" pertenece tanto al plano α como a la recta t.

Como consecuencia de todo esto, P" Q", y, P' Q', serán las proyecciones de la distancia entre el punto P y el plano dado α.

Para hallar la verdadera magnitud de la distancia entre los puntos, P y Q, seguiremos el mismo procedimiento estudiado en el 1er apartado de este capítulo. (ver figura nº 8).

HALLAR LA DISTANCIA DE UN PUNTO (P), A UNA RECTA (t).
FIG.9

Figura 10. Por el punto dado P, trazamos el plano α, con la condición de que éste sea perpendicular a la recta dada t, utilizando, para ello, la recta horizontal del plano h' h".

Ahora, veamos la figura 11. Hacemos pasar el plano proyectante vertical β, por la recta dada t, que cortará al plano dado en la recta intersección de ambos i' i".

El punto Q, cuyas proyecciones son, Q' Q", pertenece a la recta t, perpendicular al plano α, que contiene al punto P.

Por tanto P' Q' y P" Q" serán las proyecciones del segmento, PQ, distancia entre el punto P y la recta dada t.

La verdadera magnitud del segmento, se obtendrá según el procedimiento estudiado, en el apartado nº1.

HALLAR LA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS DADAS (t) Y (s).
FIG. 12 y 13

Figura nº 13. Trazaremos un plano α, con la condición de que sea perpendicular a las rectas dadas t y s.

a.- En el sistema diédrico (ver fig.14) trazamos el plano α perpendicular a las rectas t y s.

b.- Por la recta s, trazamos un plano proyectante β.

c.- Obtenemos la intersección de los planos α y β, dandonos la recta i.

d.- El punto P de proyecciones P'P" pertenece a la recta s y al plano α, ambos perpendiculares entre sí.

En la figura nº 15, hemos seguido el mismo método, haciendo pasar por la recta t el plano π; *proyectante vertical*.

La intersección de este plano con el α nos dará una nueva recta de intersección.

El punto Q de proyecciones Q' Q", pertenece a la recta t y al plano α, perpendicular a ésta.

Por tanto, si el plano α, es perpendicular a las rectas t y s, y los puntos P y Q pertenecen a las rectas y al plano, las proyecciones, P' Q', y P" Q", serán las del segmento PQ, distancia entre las rectas t y s.

HALLAR LA DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS DADOS (α y β).

FIG.16

En la figura nº 17, trazamos una recta, t, perpendicular a los planos dados.

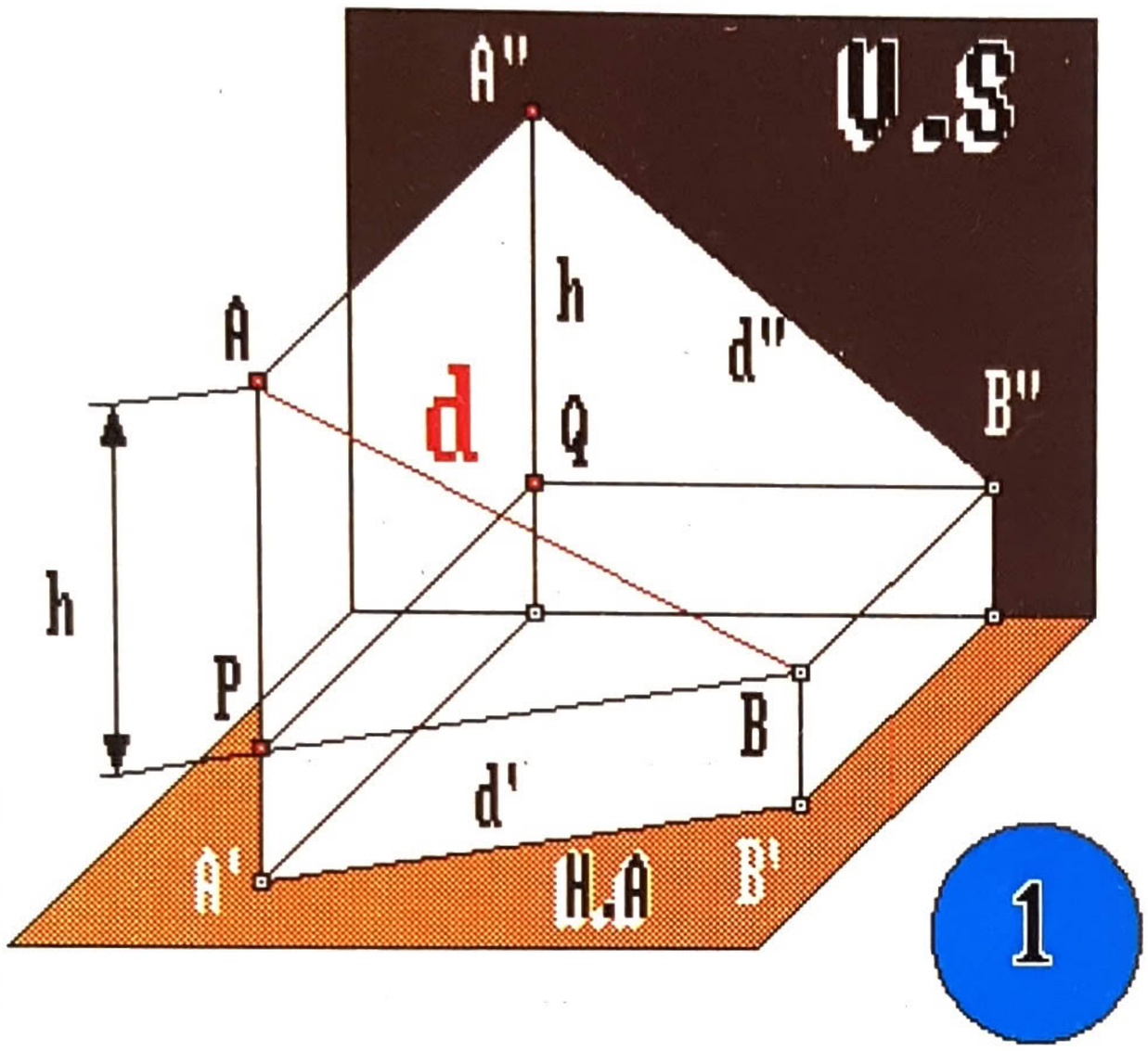
Por la recta t, hacemos pasar un plano proyectante. (En nuestro caso el plano *proyectante vertical*).

En la figura nº 18, hallamos la intersección del nuevo plano π, con los planos dados α y β, que serán las rectas i_v e i_a.

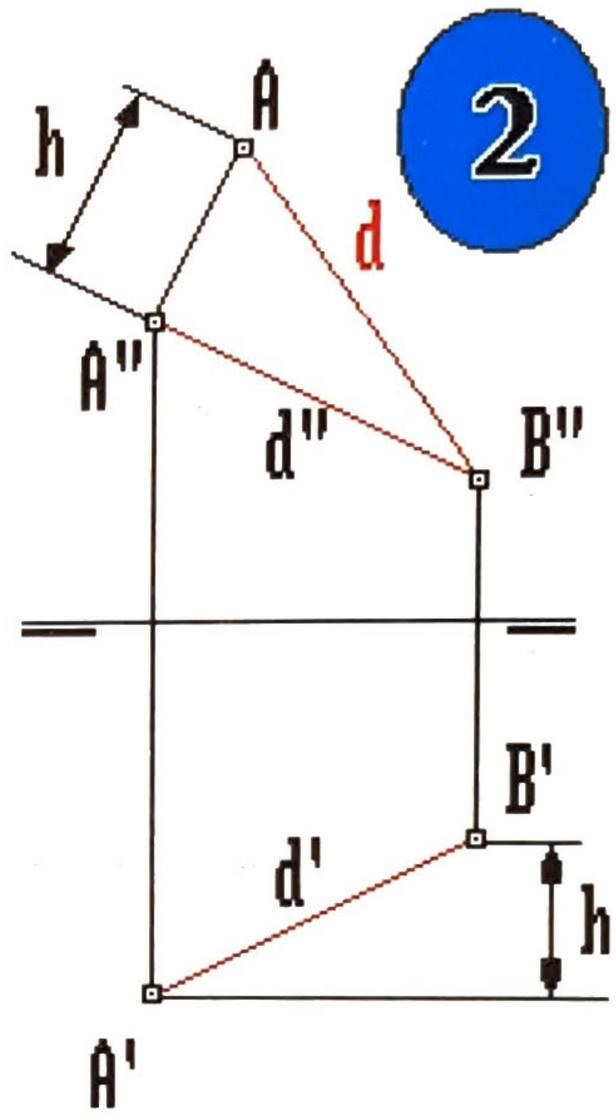
En las rectas intersección encontramos los puntos P y Q, ambos pertenecientes a la recta t, perpendicular a dichos planos, al mismo tiempo que cada uno de los puntos pertenece también a los planos dados α y β.

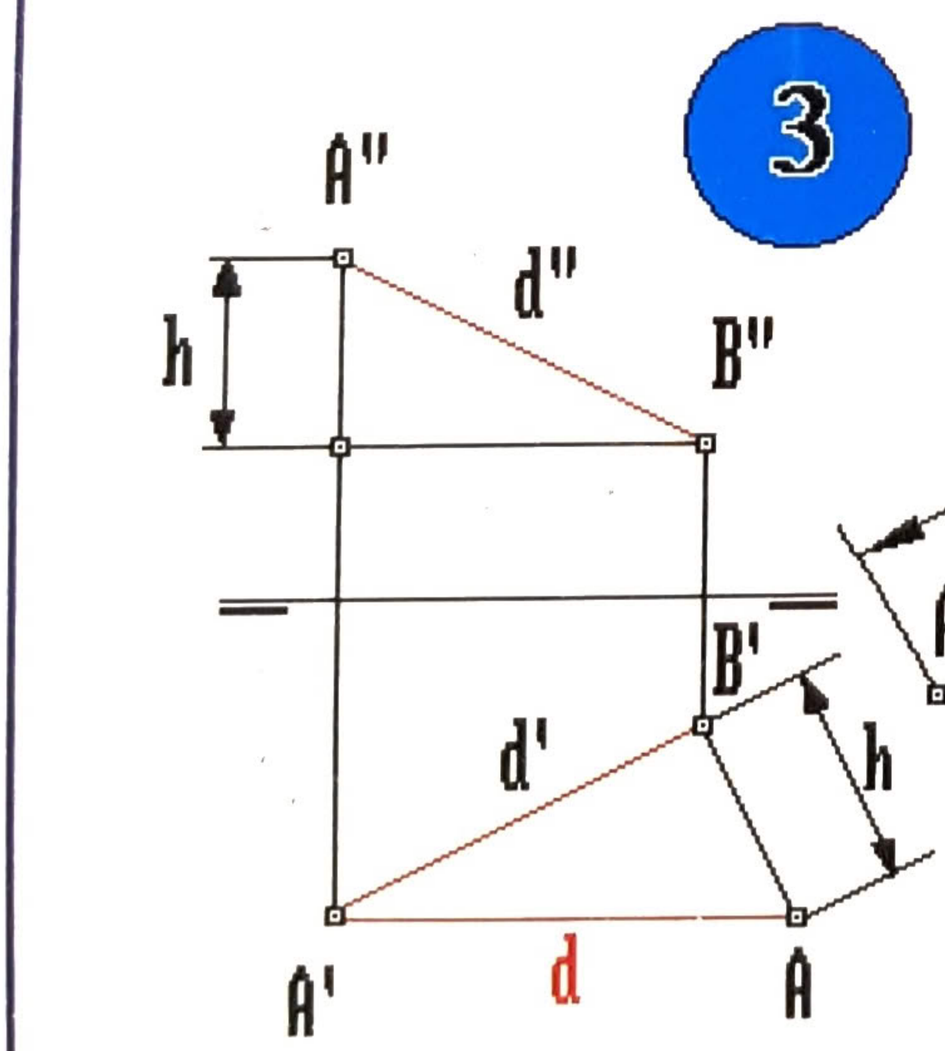
Las proyecciones P'Q' y P"Q", serán las del segmento distancia PQ, entre los planos dados α y β.

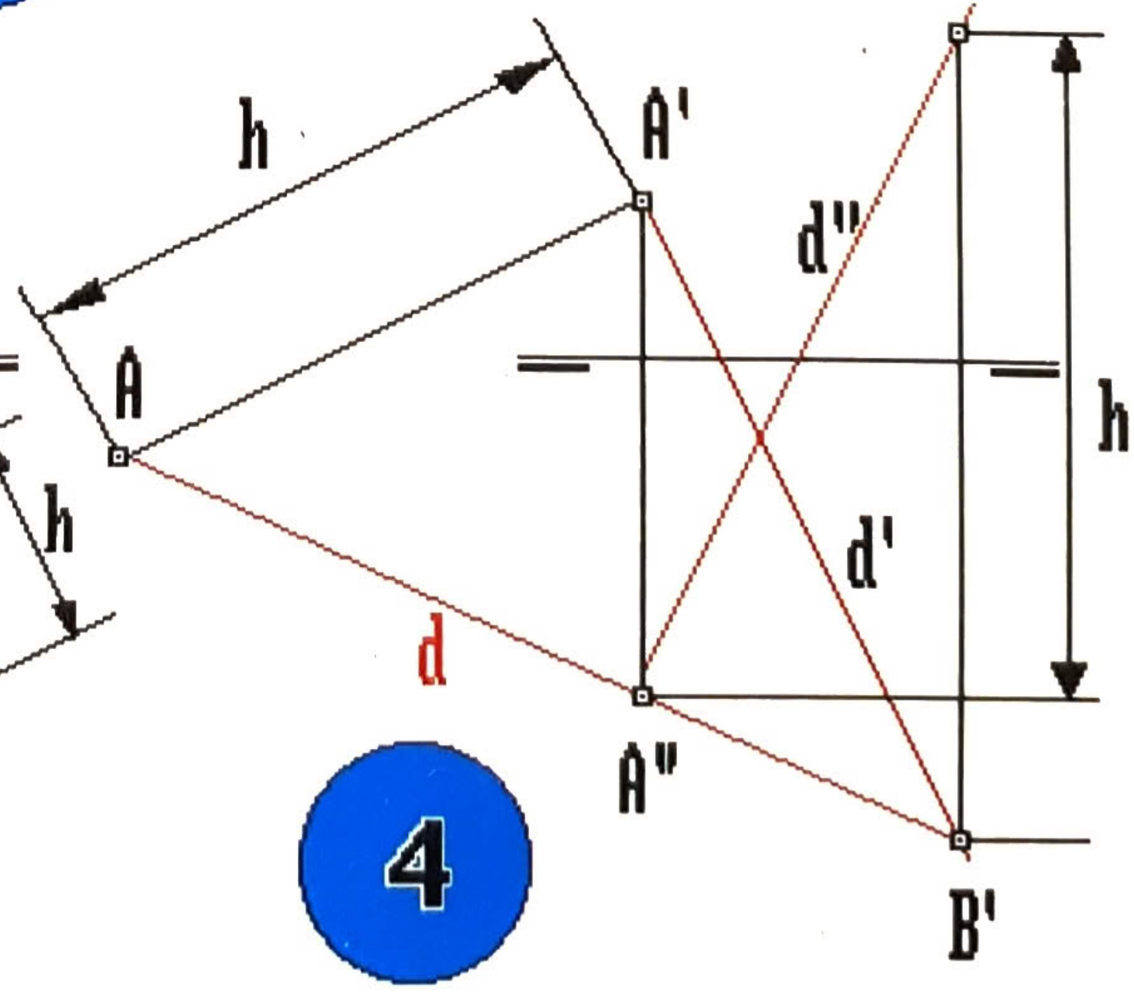
Para obtener la verdadera magnitud de la distancia, utilizaremos el procedimiento estudiado en el apartado nº1 de este capítulo.



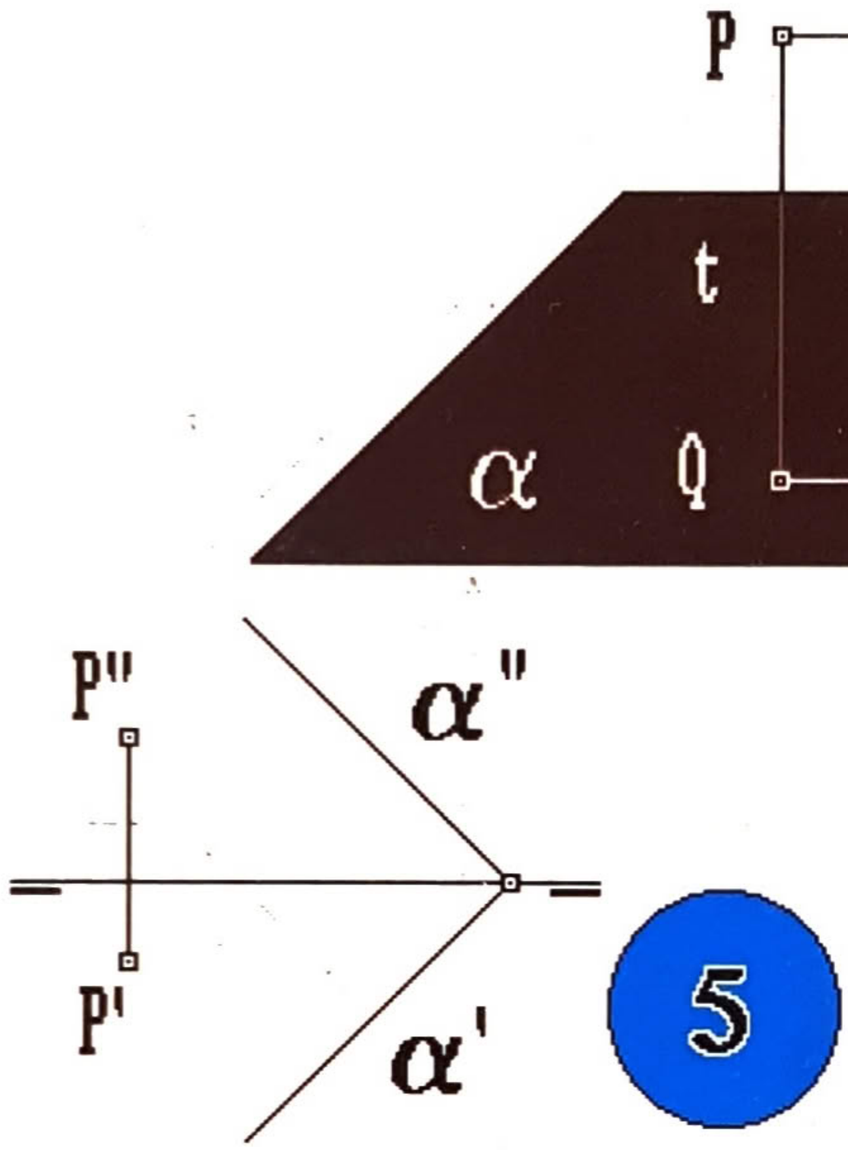
1



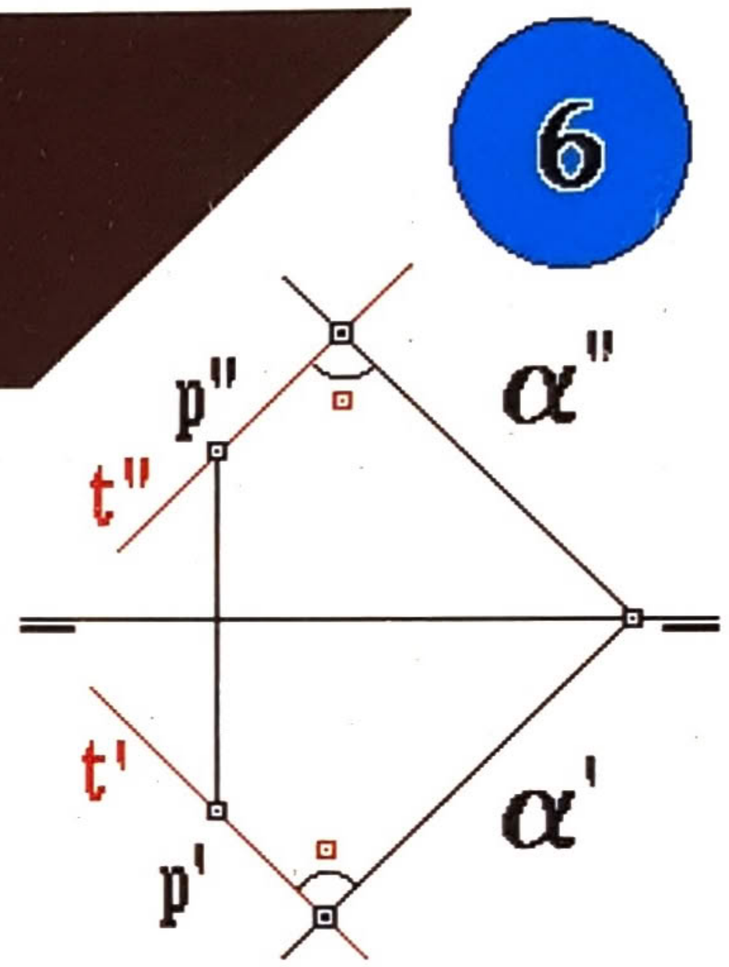




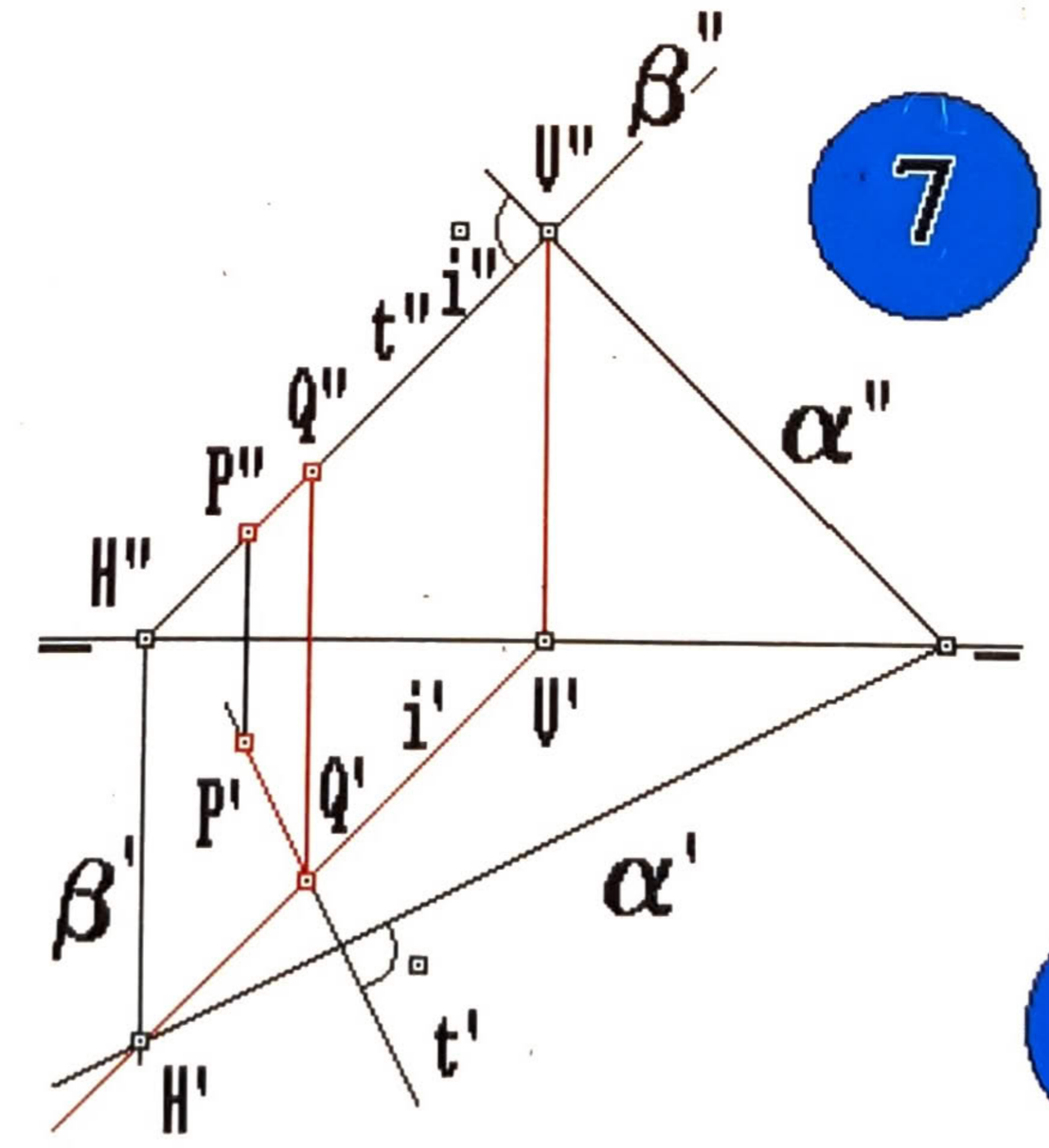
4



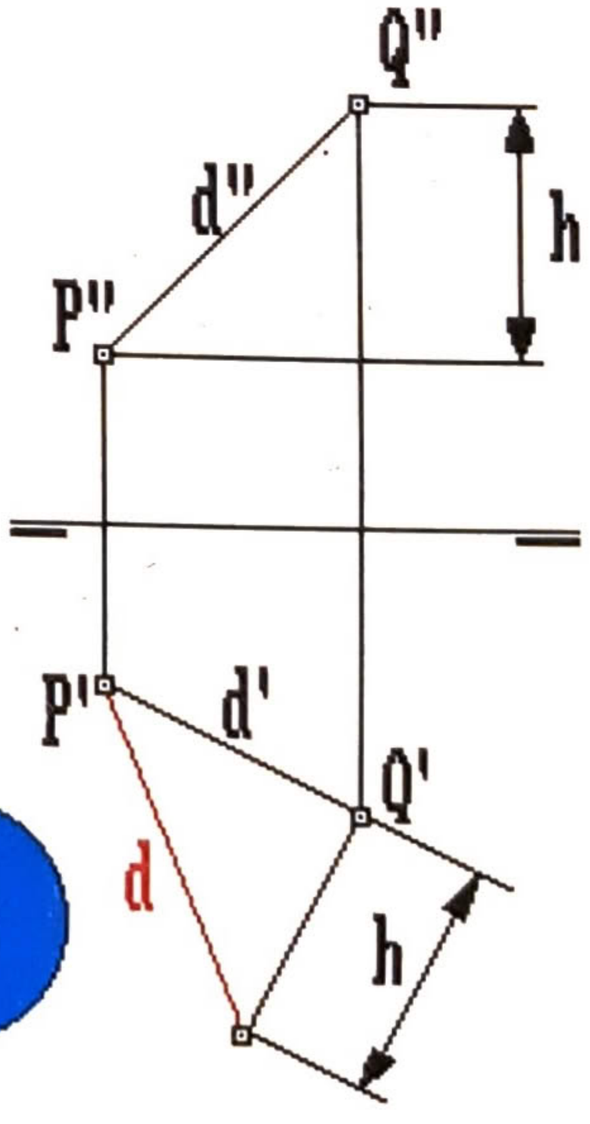
5



6

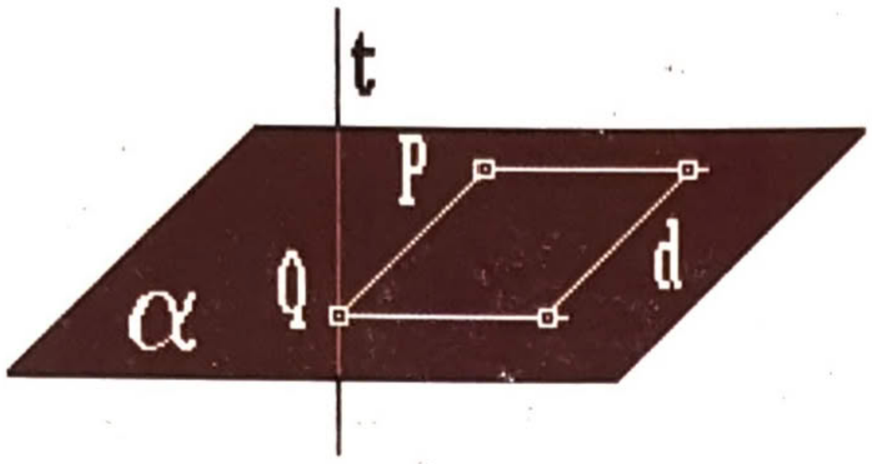


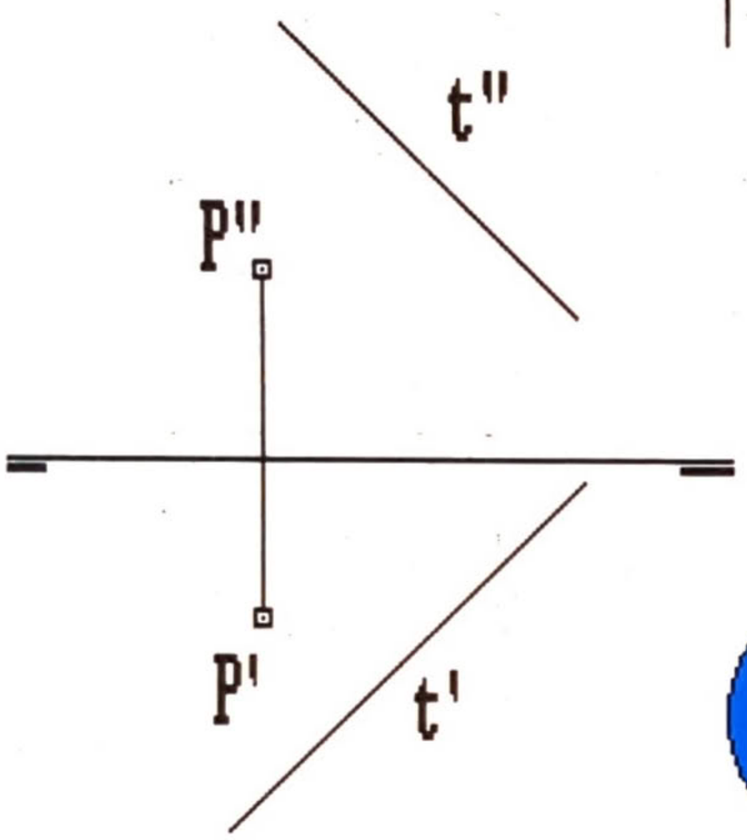
7



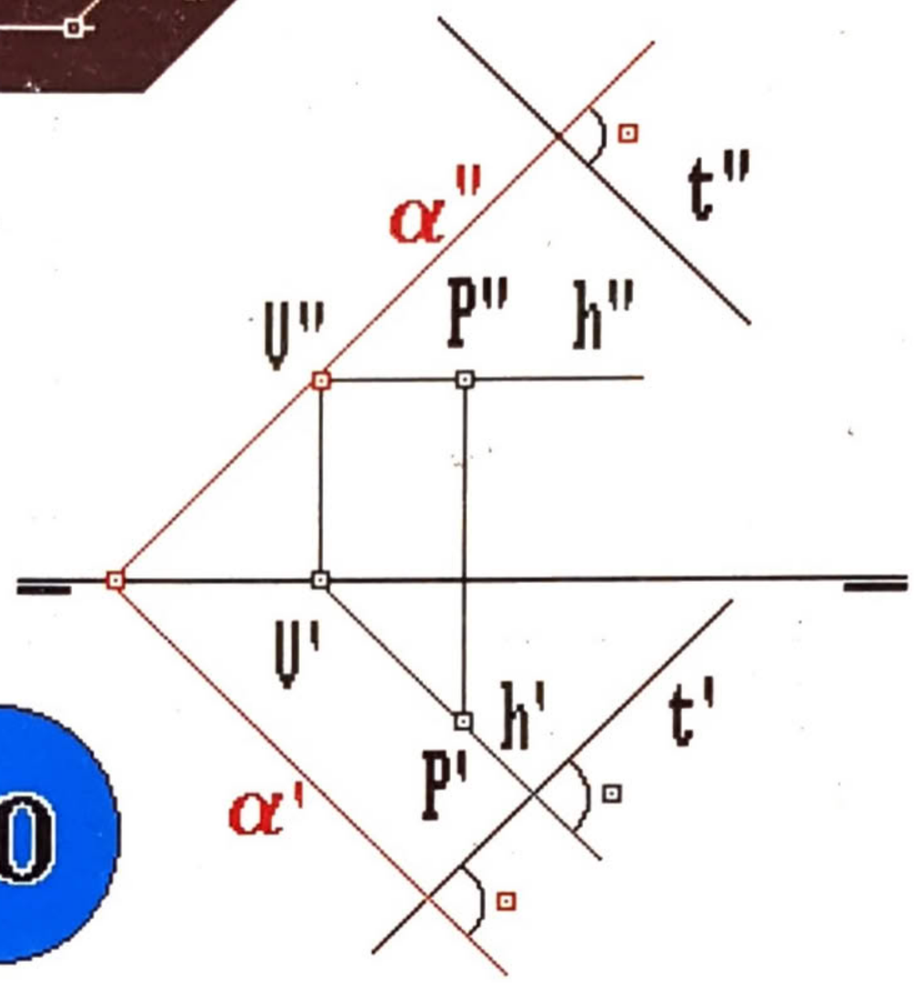
8

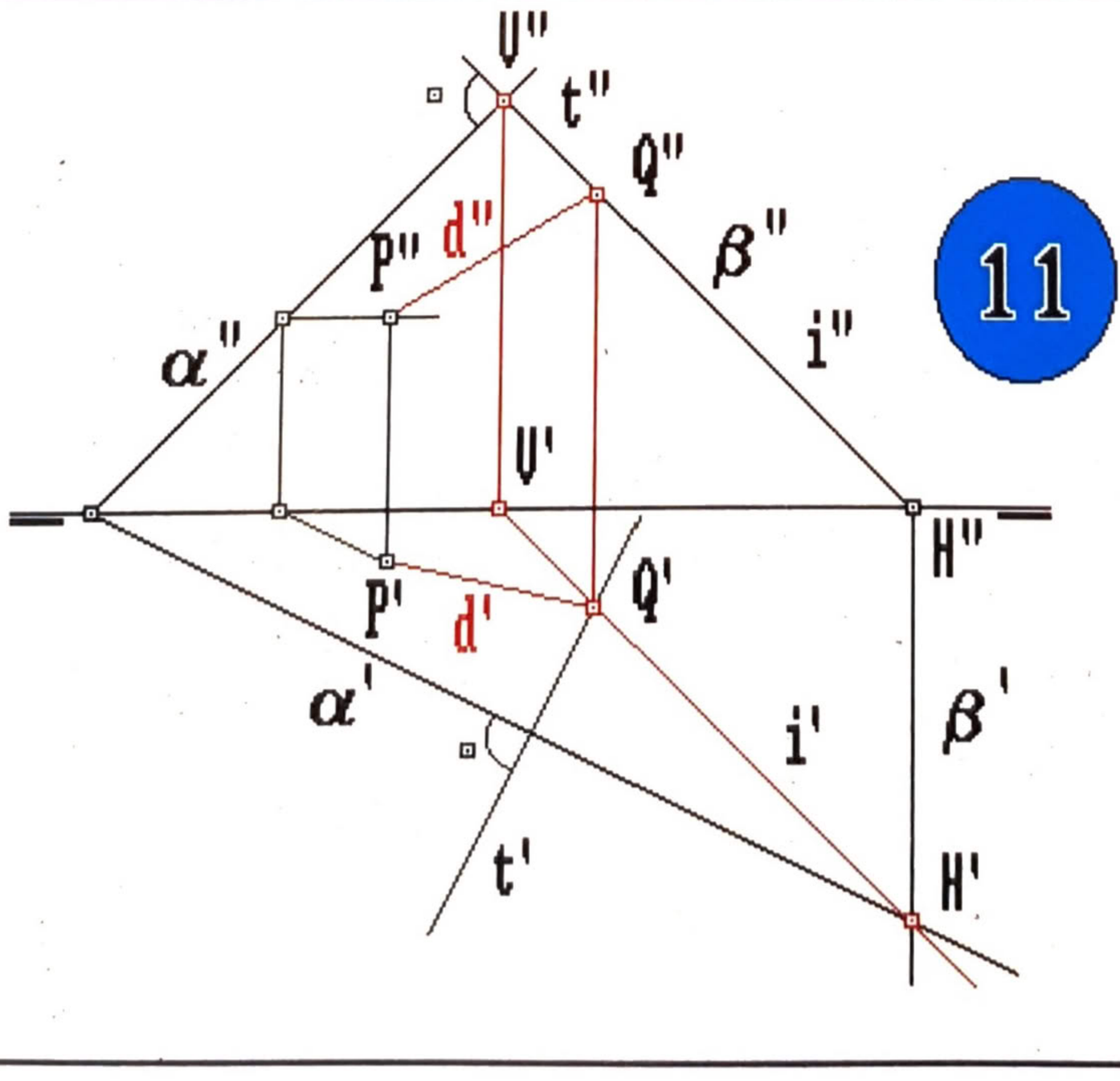
9



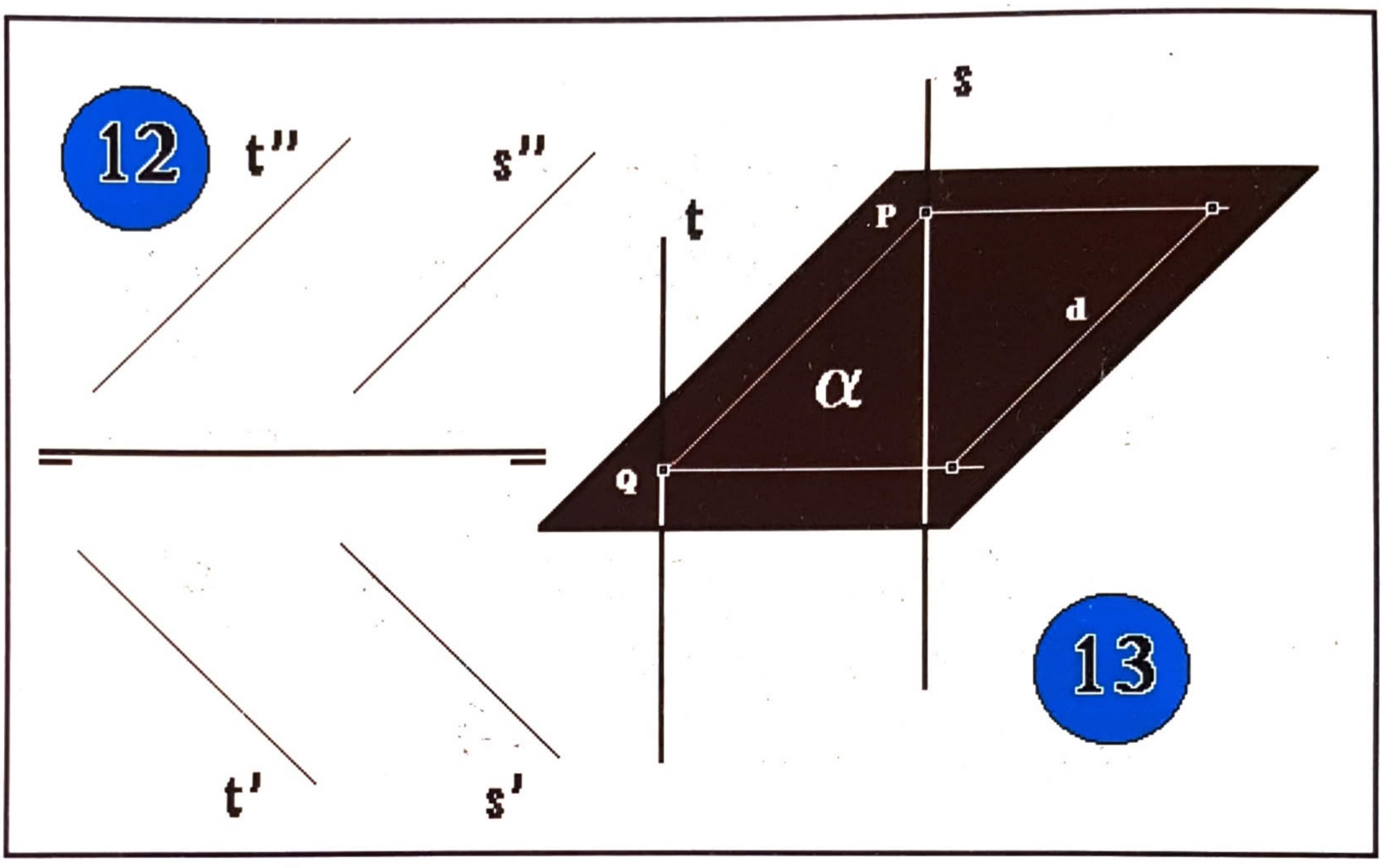


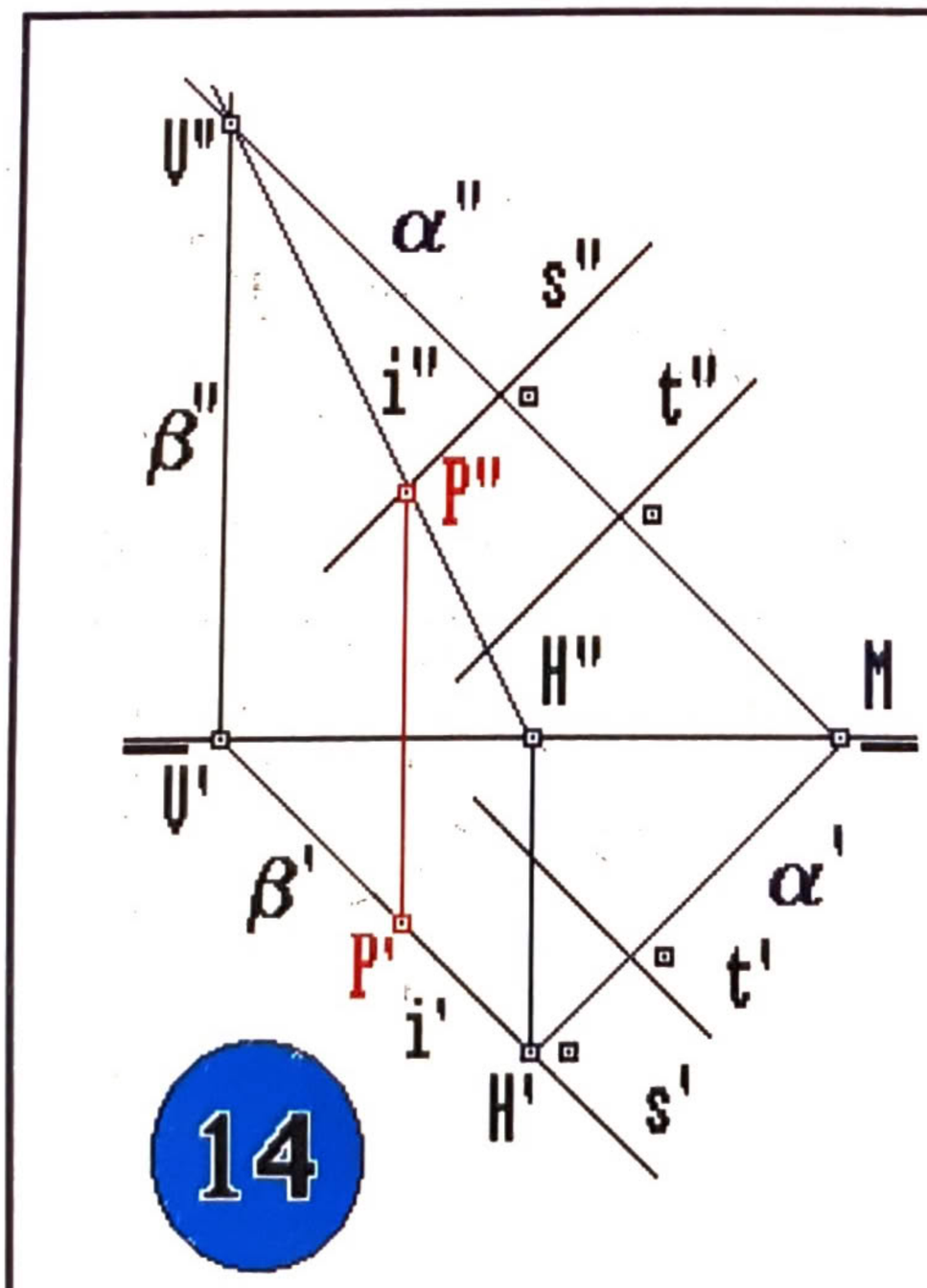
10

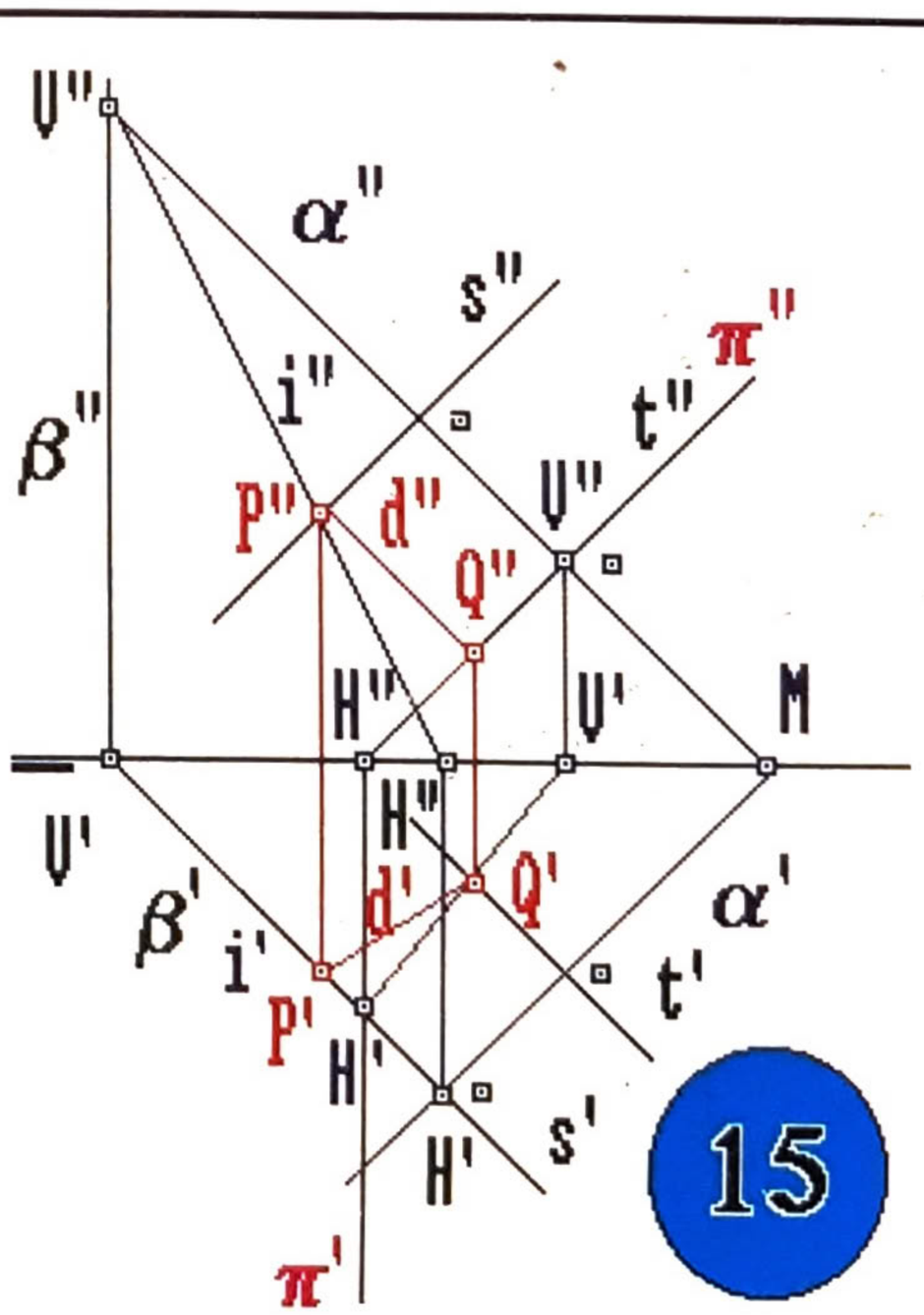


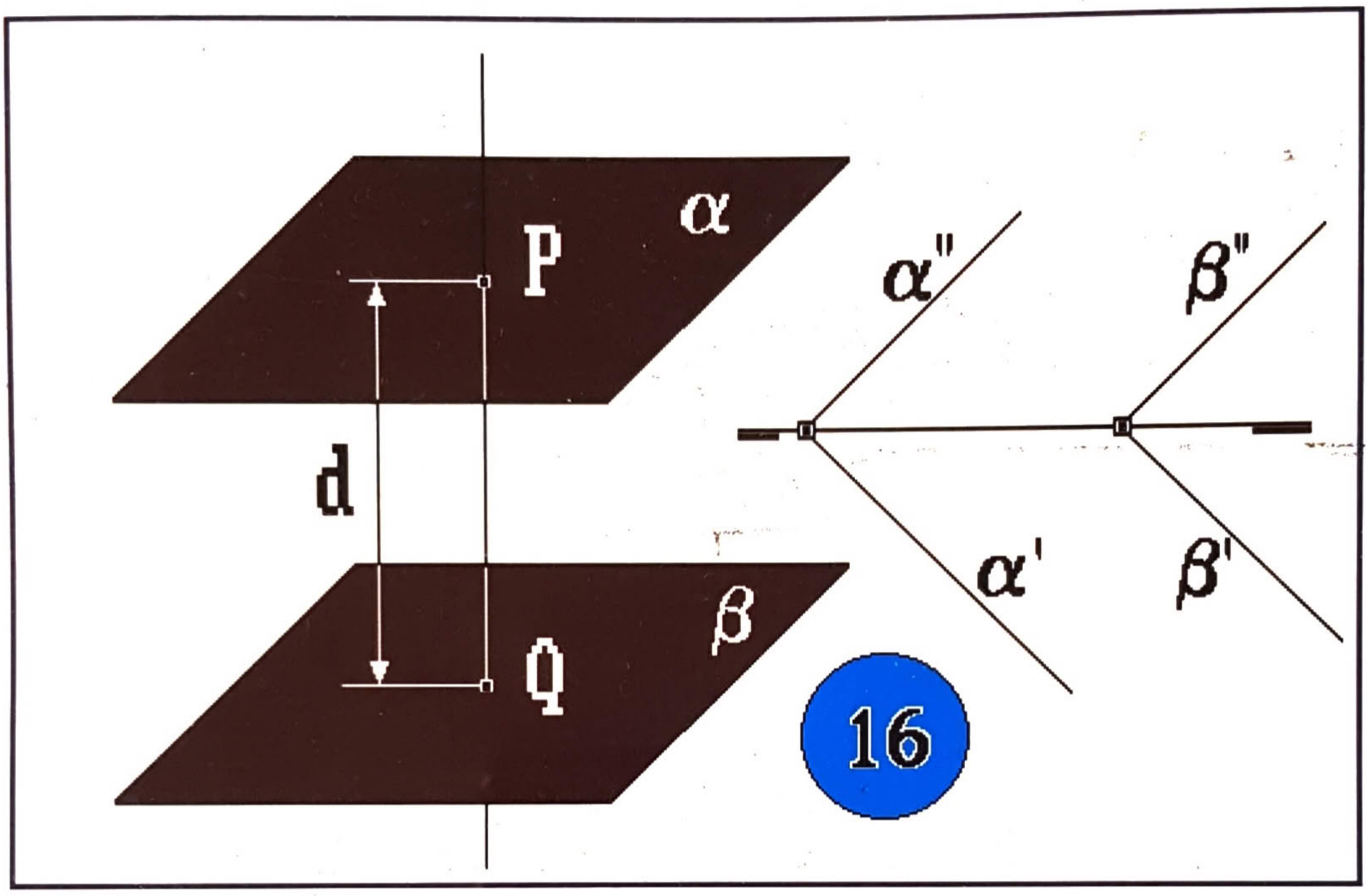


11

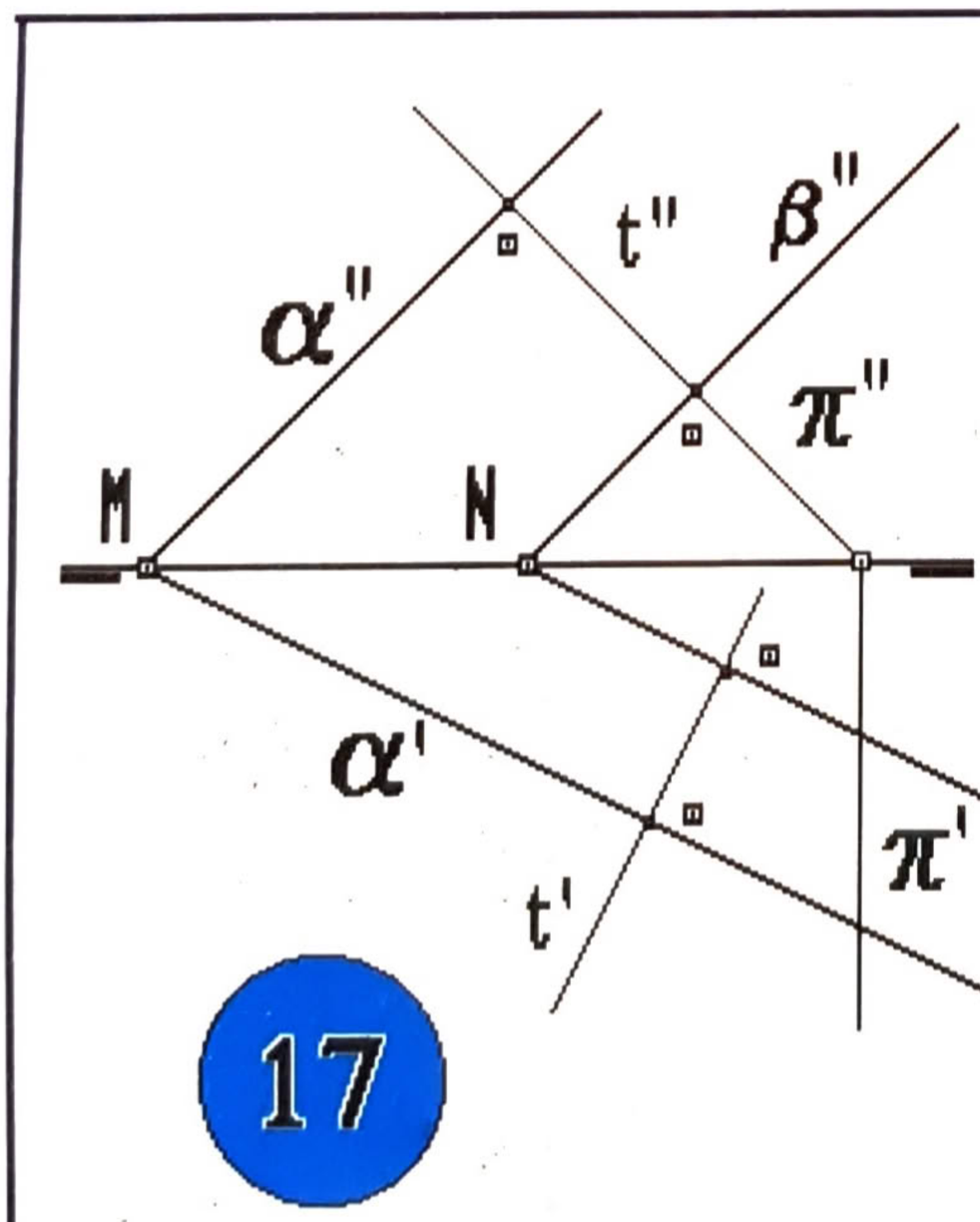

12
t''
s''
t'
s'
s
t
P
d
α
q
13


V''
α''
s''
β''
i''
t''
P''
H''
M
V'
β'
P'
i'
H'
s'
α'
t'
14

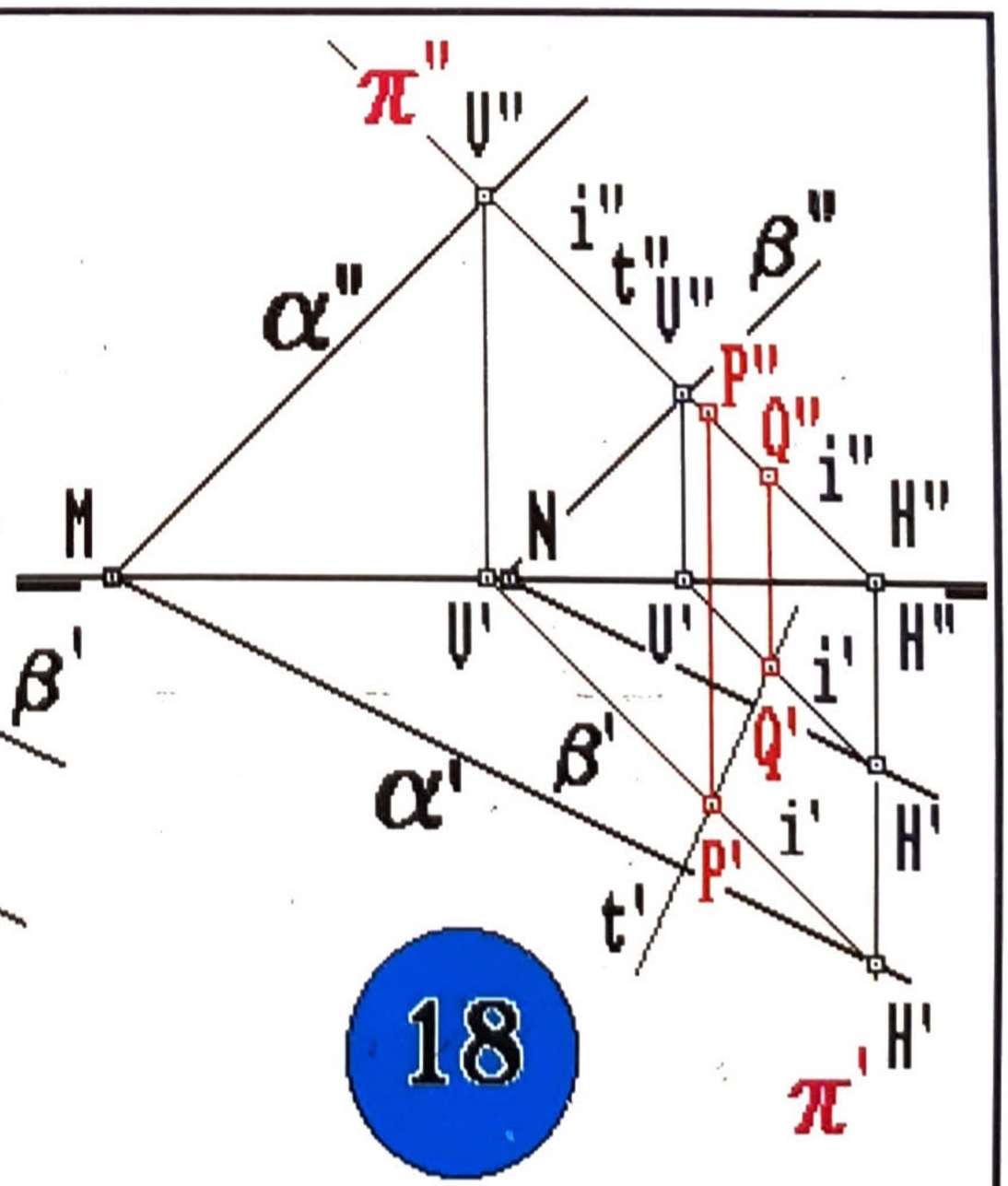

V''
α''
s''
π''
β''
i''
t''
P''
d''
V''
Q''
H''
V'
M
V'
H''
β'
d'
Q'
α'
i'
P'
t'
H'
s'
H'
π'
15



16



17



18

Representación de poliedros, prismas, y pirámides

POLIEDROS

Poliedro, es un sólido del espacio, de tres dimensiones, limitado por superficies planas.

La superficie que separa el sólido, del espacio que lo rodea está constituido por una serie finita de polígonos (caras) que en su conjunto denominaremos, superficie poliédrica.

Entre los poliedros podemos distinguir, los regulares y los irregulares.

Son poliedros regulares aquellos que tienen sus caras y ángulos iguales entre sí, mientras que en el caso de los irregulares son desiguales.

Entre los poliedros regulares definiremos los siguientes:

* Tetraedro.
* Hexaedro o cubo.
* Octaedro.
* Dodecaedro.
* Icosaedro.

TETRAEDRO

Un tetraedro está formado por 4 caras, siendo todas ellas triángulos equiláteros.

En la fig. 1 el tetraedro es el formado por los vértices 1, 2, 3 y V. Sus caras son las formadas por los triángulos equiláteros V12, V23, V31 y 123. La altura V0 pasa por el centro de la base 123.

En la fig. 2 hemos representado el desarrollo de la superficie poliédrica constituida por cuatro triángulos equiláteros.

HEXAEDRO O CUBO

Está formado por 6 caras, siendo todas ellas cuadrados (ver fig. nº3).

En la fig. 4 hemos representado el desarrollo de la superficie poliédrica constituida por 6 cuadrados.

OCTAEDRO

Está formado por ocho caras, siendo todas ellas triángulos equiláteros. (ver fig. nº5)

En la fig. 6 hemos representado el desarrollo de la superficie poliédrica constituida por ocho triángulos equiláteros.

DODECAEDRO

El dodecaedro, está formado por doce caras, siendo todas ellas pentágonos regulares. (Ver fig. 7).

ICOSAEDRO

Está formado por veinte caras, todas estas caras son triángulos equiláteros.

PRISMAS

Un prisma es un sólido del espacio de tres dimensiones limitado por superficies planas y dos planos secantes, paralelos entre sí.

Los dos planos secantes serán polígonos y lo denominaremos "bases", mientras que el resto de las caras las denominaremos "caras laterales" y el conjunto de éstas lo denominaremos "superficie lateral".

La distancia entre las bases es la altura del prisma .

Los prismas pueden ser regulares o irregulares, en el primer caso sus bases son polígonos regulares, mientras que en el segundo son irregulares; cuando las bases del prisma sean paralelogramos, lo denominaremos paralelepípedos.

Los prismas pueden ser rectos u oblicuos; en el primer caso sus aristas laterales son perpendiculares a las bases, mientras que en el segundo caso las aristas son oblicuas.

En el caso de la fig. 8 hemos representado un prisma recto cuya base inferior es el cuadrado de vértices 5, 6, 7, 8 (Paralelepípedo cuadrado).

El desarrolllo total estará constituido por cuatro rectángulos y los dos cuadrados correspondientes a sus bases.

En el caso de la fig.10 hemos representado un prisma oblicuo cuyas bases son los cuadrados de vértices 1, 2, 3, 4 la superior y 5, 6, 7, 8 la inferior.

PIRAMIDES

Una pirámide es el sólido del espacio de tres dimensiones, limitado por superficies planas, que tienen por base cualquier polígono y sus caras laterales son triángulos cuyas bases coinciden con los lados de dicho polígono.

Los vértices de todas las caras no contenidas en la base coinciden con un punto común llamado vértice de la pirámide.

Denominaremos a las aristas que concurren en el vértice "aristas laterales" y a los lados del polígono de la base "aristas básicas".

Las pirámides pueden ser regulares o irregulares según que el polígono de la base sea regular o irregular respectivamente.

Cuando la perpendicular trazada desde el vértice de la pirámide coincide con el centro del polígono de su base, se dice que es recta, en caso contrario la pirámide es oblicua.

La altura de las caras laterales de la pirámide la llamaremos "apotema".

En la fig. 9 hemos representado una pirámide recta de base un octógono regular, a la derecha de la figura, podemos observar el desarrollo de una de sus ocho caras laterales V12 siendo el segmento VA el valor de su apotema.

En la fig. 11 hemos representado una pirámide oblicua, cuya base es un hexágono regular, como podemos apreciar la proyección del vértice V sobre la base no coincide con el punto 0 centro del hexágono de la base.

PROCEDIMIENTOS UTILES

Altura del tetraedro.

La altura del tetraedro está relacionada con el valor del lado del triángulo equilátero de su base. Para obtener dicho valor procederemos de la siguiente forma (Ver fig. 13).

Por la proyección horizontal de una de las aristas laterales (en nuestro caso la Va) trazamos una perpendicular a Va por el punto 0 y con centro en a y radio ac, trazamos un arco que cortará a la perpendicular trazada anteriormente en el punto V, que es el vértice V abatido sobre el plano horizontal.

La altura del tetraedro será como se puede apreciar en la fig.12 el segmento V0.

Inscripción en una circunferencia de un polígono regular de n lados.

a.- Trazamos la circunferencia de radio 0A, obteniéndose los puntos A, B, C y D.

b.- Con centro en D trazamos un arco de radio DC y con centro en C otro arco del mismo radio, ambos arcos cortarán en un punto F a la prolongación del diámetro AB.

c.- A partir del punto C trazamos una recta cualquiera y a partir de dicho punto trazamos distancias iguales, como C1, 12, 23 etc. (En nuestro caso hemos trazado cinco para obtener el lado del pentágono).

Si quisiéramos trazar un heptágono trazaríamos siete distancia , etc.

d.- Unimos la última división que en nuestro caso es la 5 con el punto D para obtener el segmento 5D.

e.- Por el segmento 5D trazamos los segmentos paralelos a éste y que pasan por los puntos 4, 3, 2 y 1.

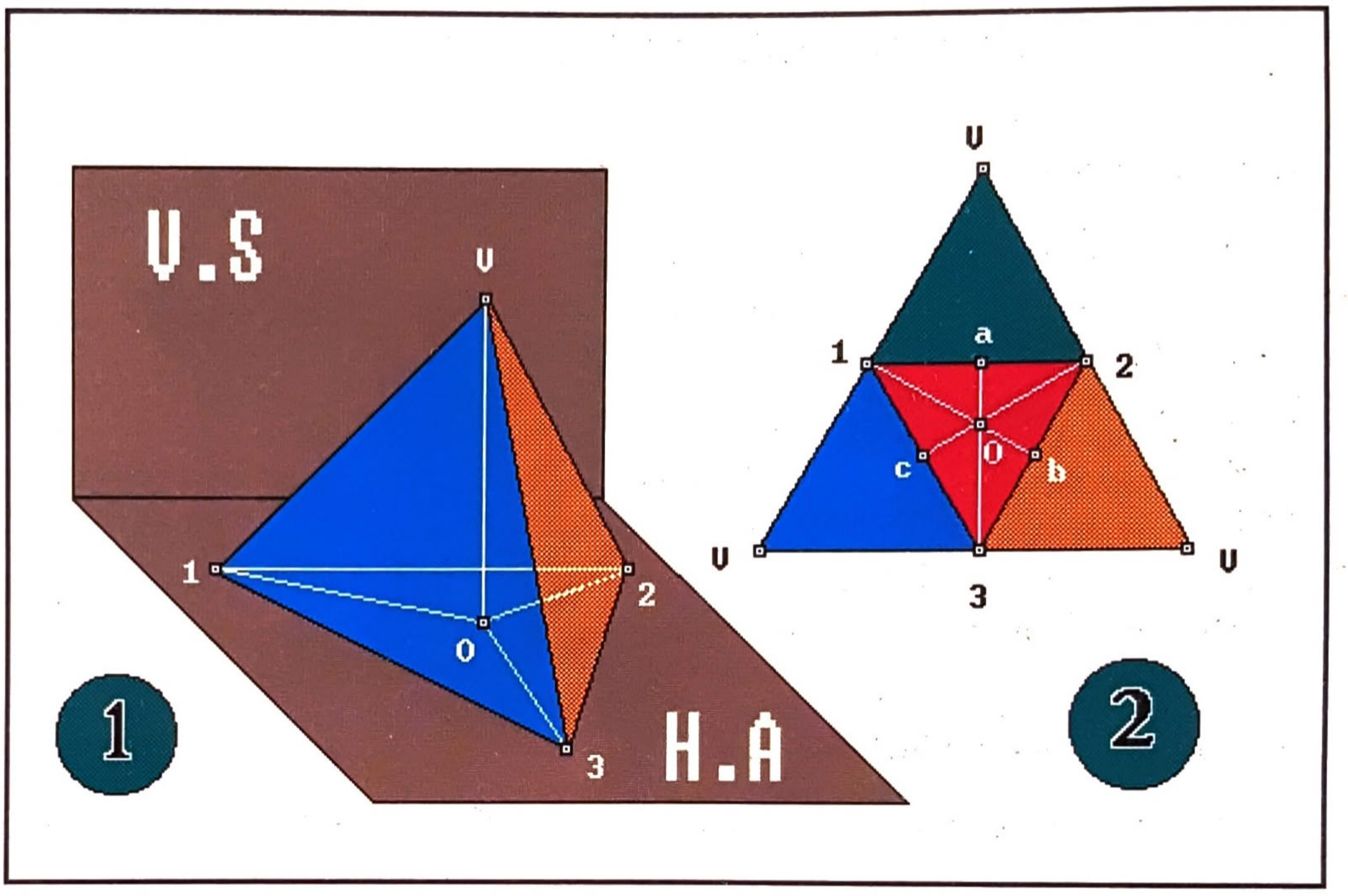
Estos segmentos cortan al eje CD en los puntos 4, 3, 2 y 1.

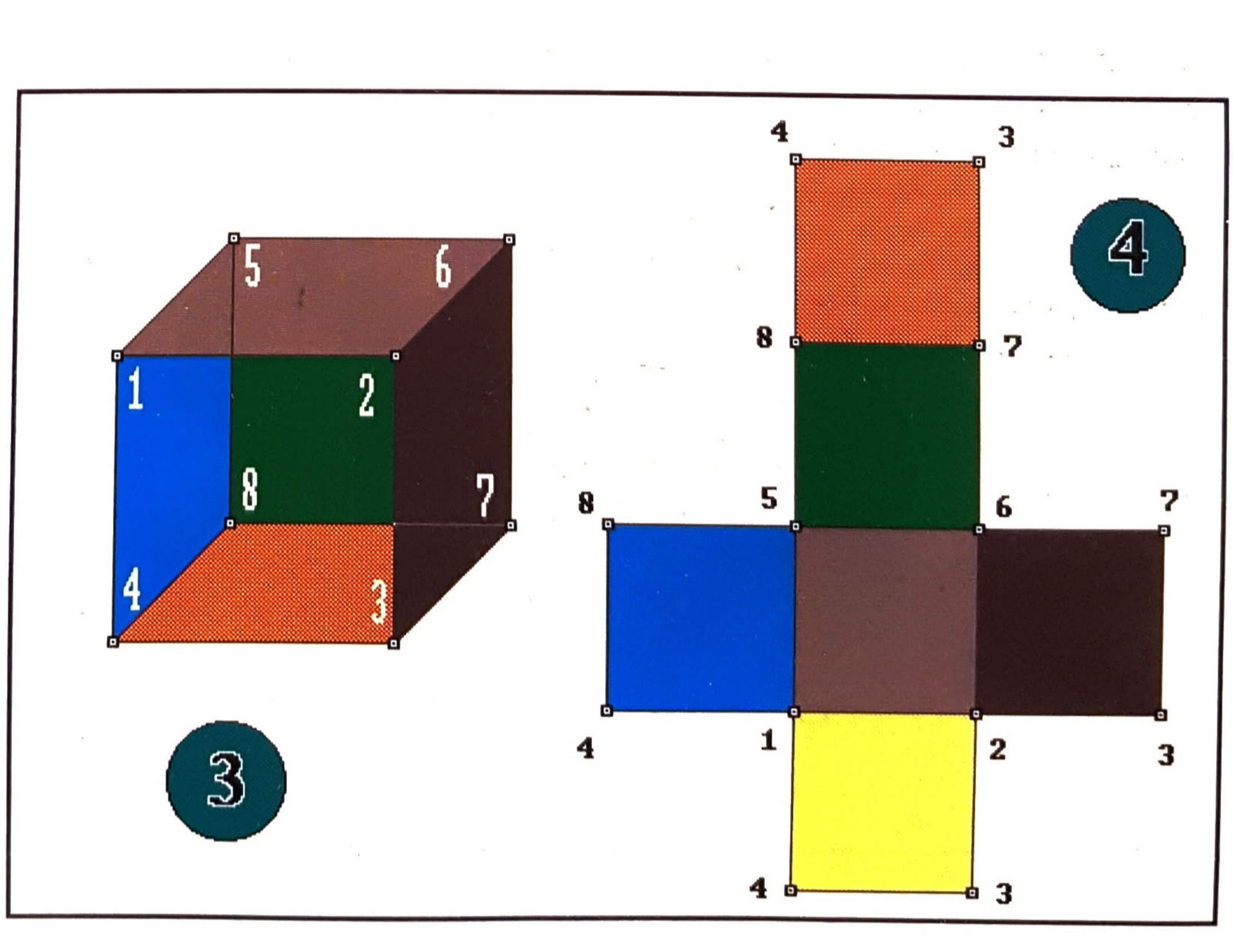
f.- Unimos F con la segunda división (para todos los casos) y encontramos el punto M en la circunferencia de radio 0A.

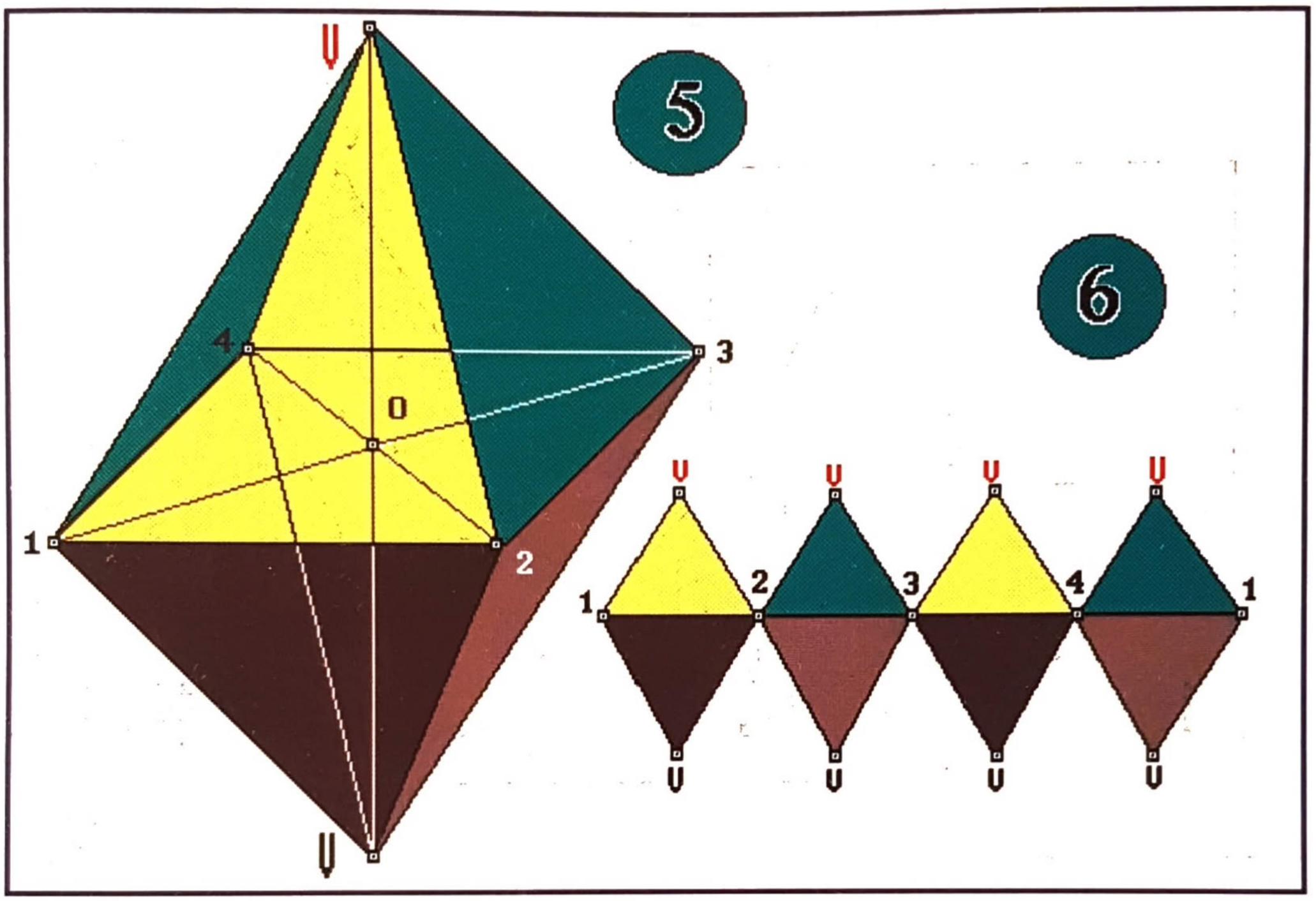
g.- La distancia CM es el valor del lado del pentágono inscrito en la circunferencia.

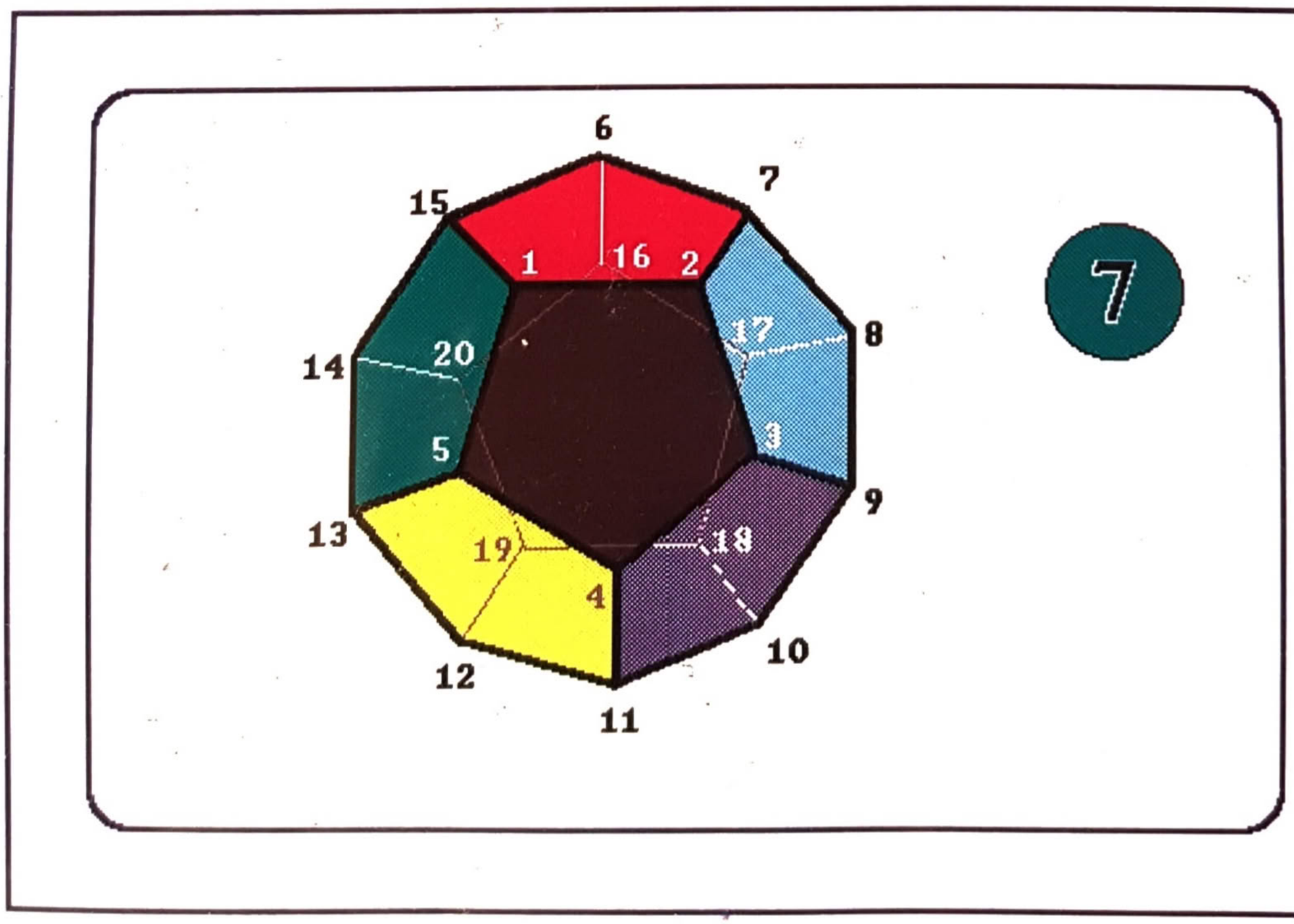
En la fig. 15 hemos representado un prisma recto cuya base es un rombo apoyado en el plano proyectante horizontal (α).

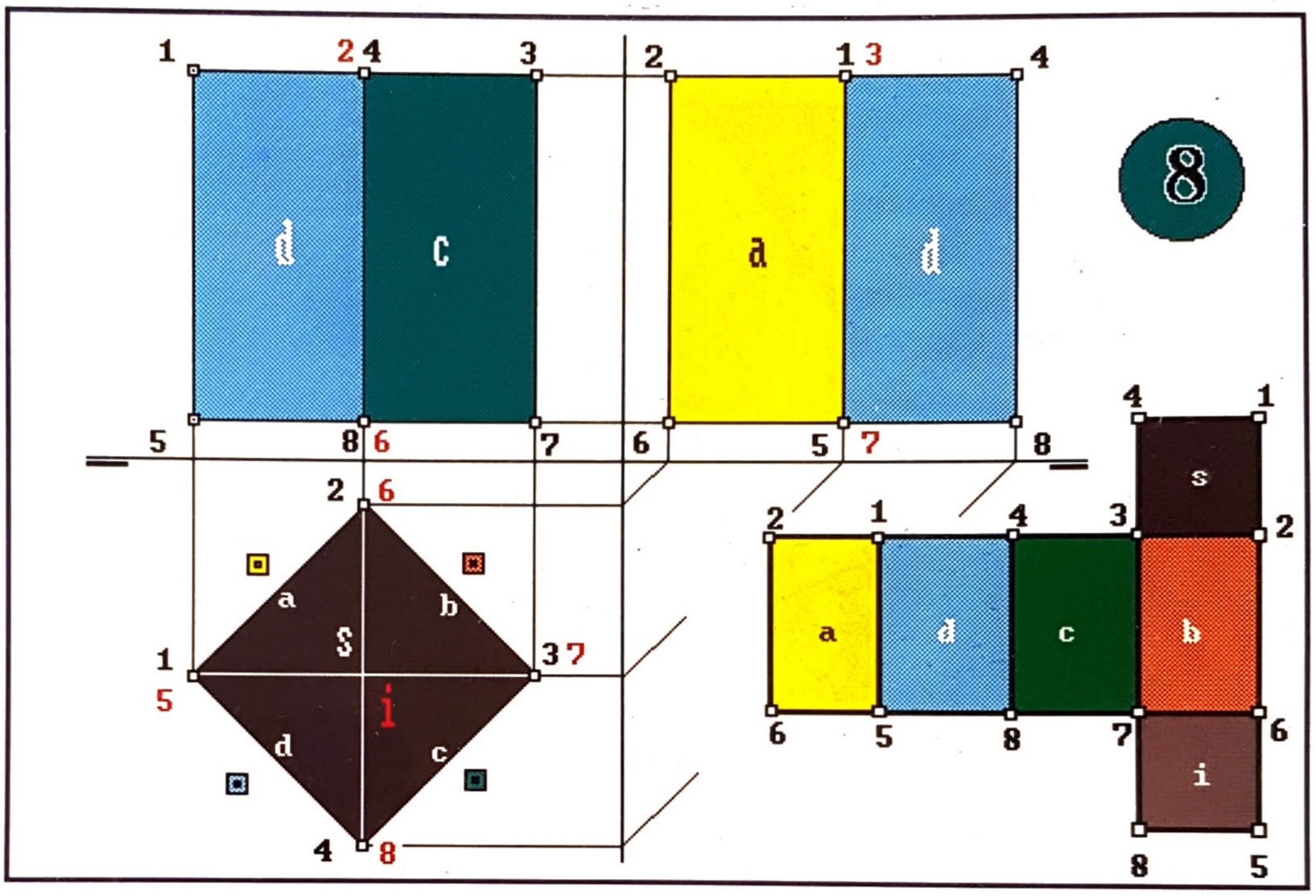
En la fig. 16 hemos representado un hexaedro apoyado en un plano paralelo a L.T.

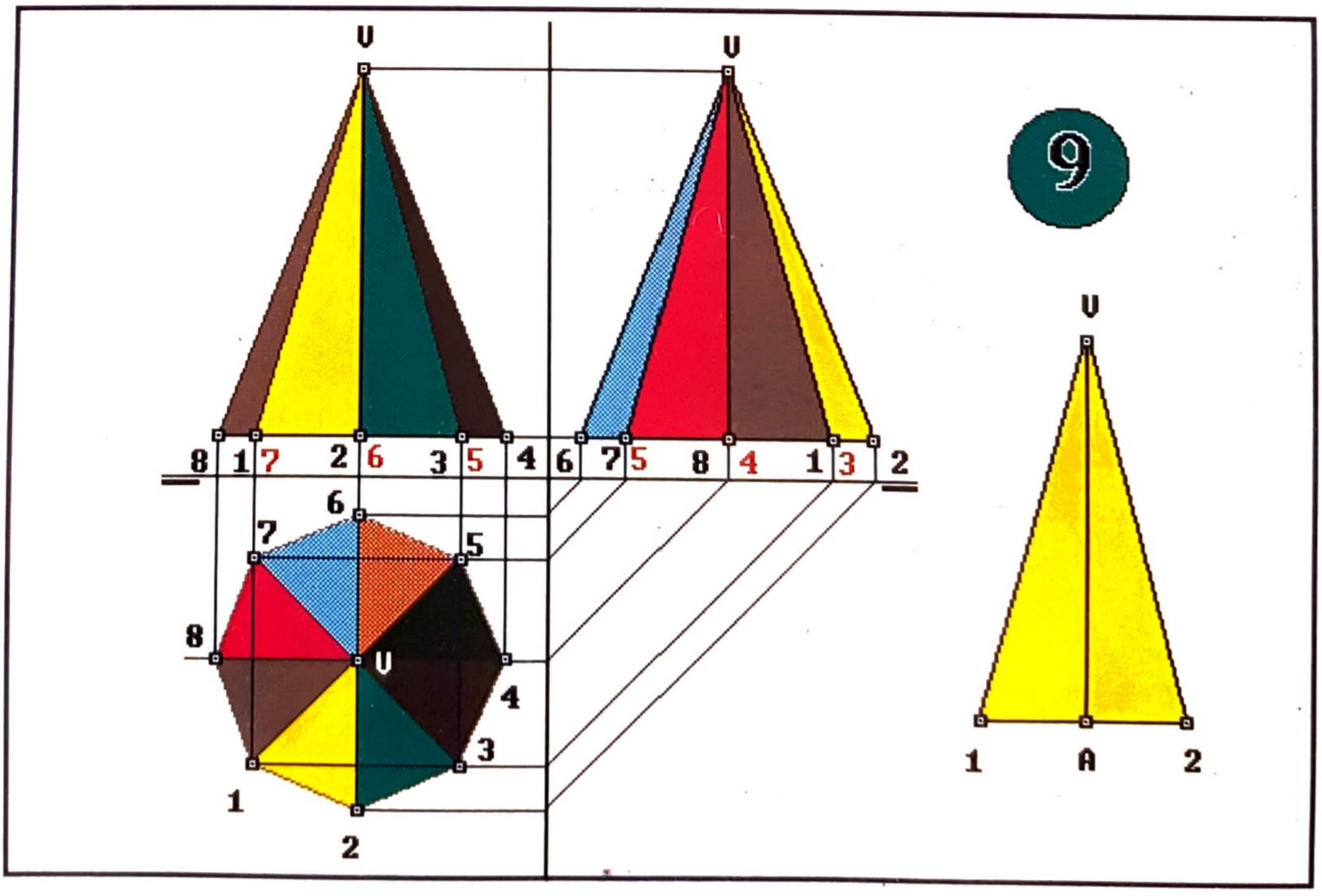

V.S
v
1
2
0
3
H.A
1
V
a
1
2
c
0
b
V
3
V
2

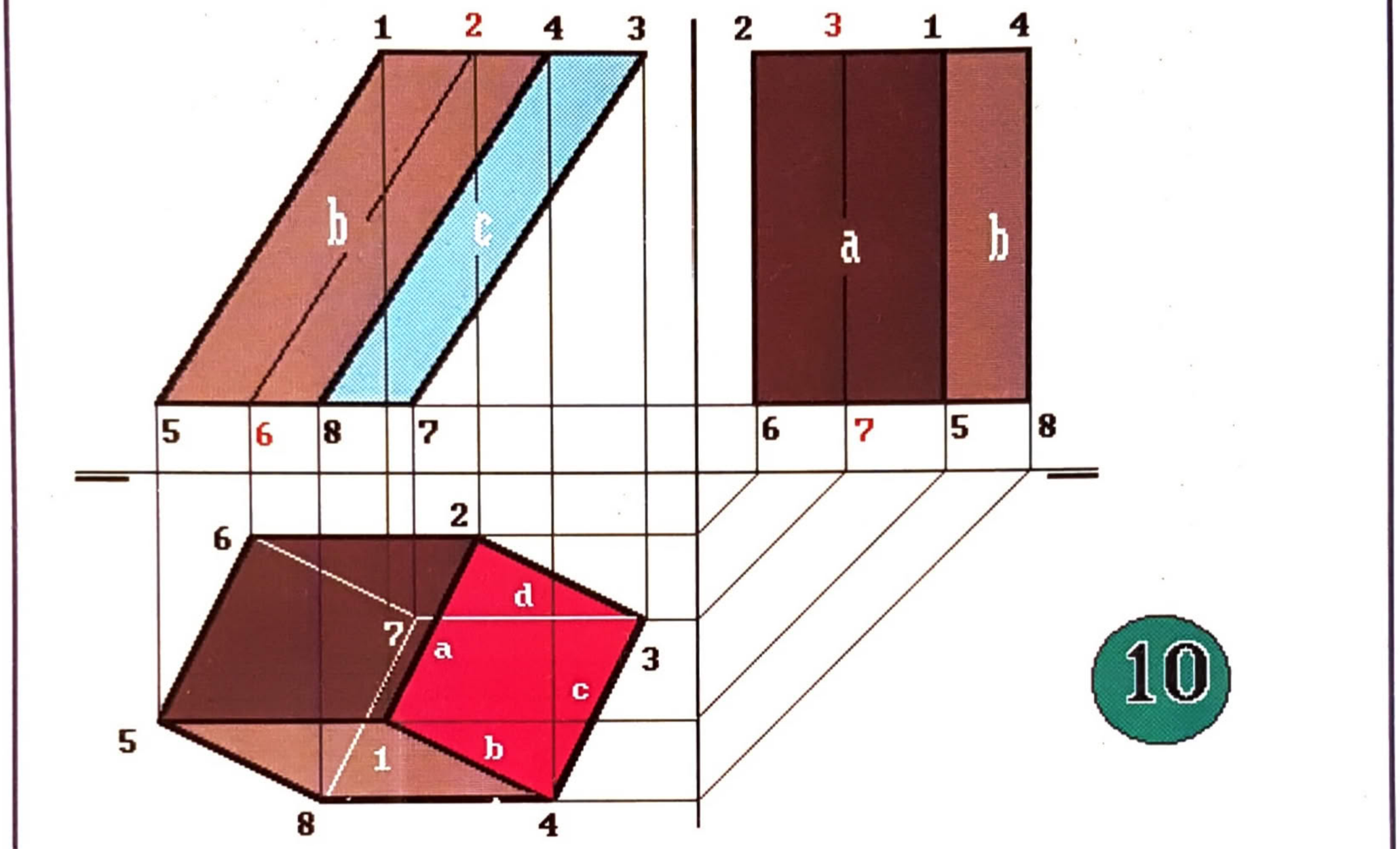

5
6
1
2
8
7
4
3
3
4
3
4
8
7
8
5
6
7
4
1
2
3
4
3
4


5
V
4
3
O
1
2
V
6
V
V
V
V
1
2
3
4
1

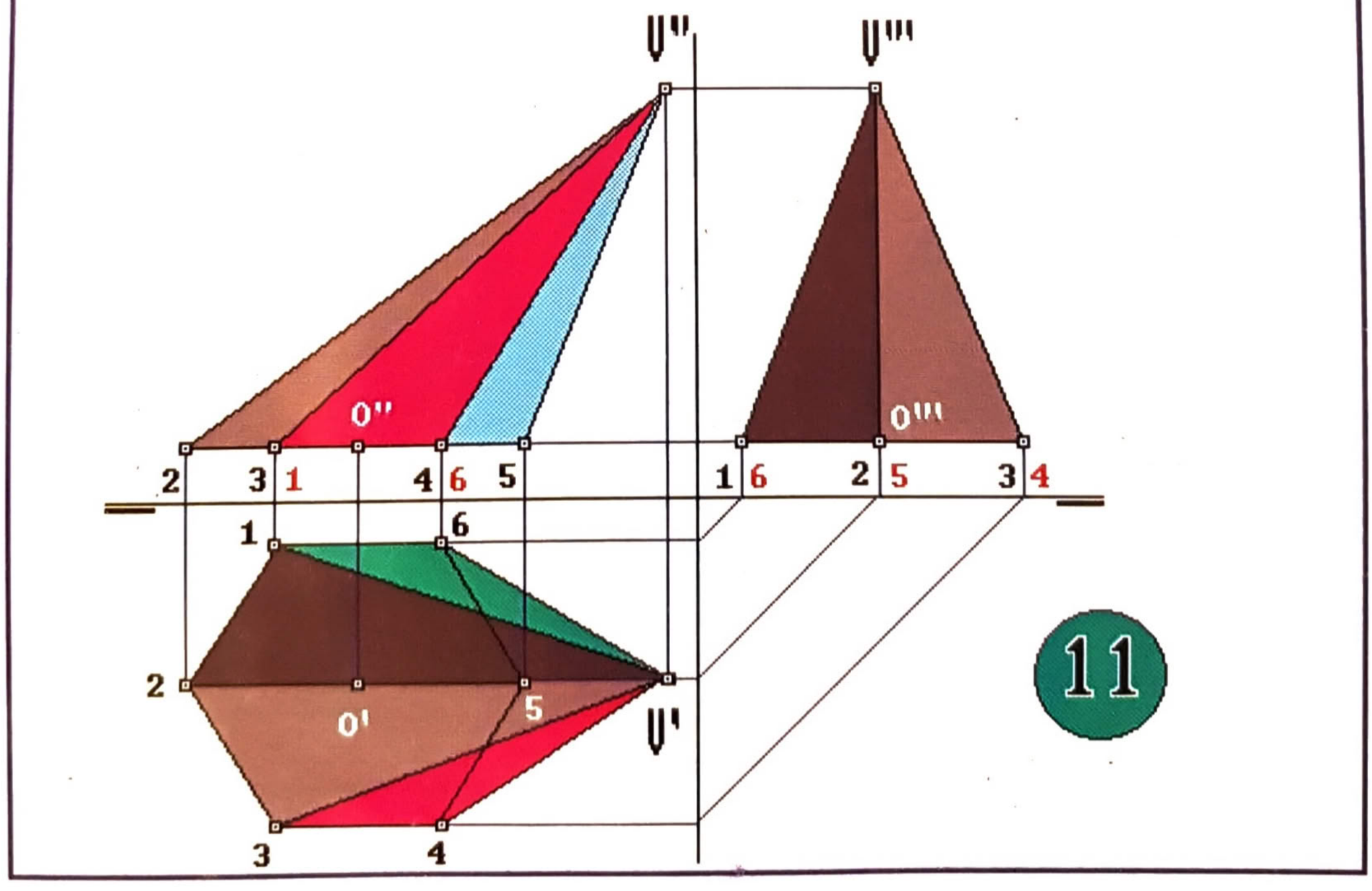

7
6
7
15
1
16
2
8
17
14
20
5
3
9
13
19
18
4
10
12
11


8
d
c
a
d
5
8
6
7
6
5
7
8
2
6
a
b
S
1
5
3
7
i
d
c
4
8
4
1
S
2
1
4
3
2
a
d
c
b
6
5
8
7
6
i
8
5

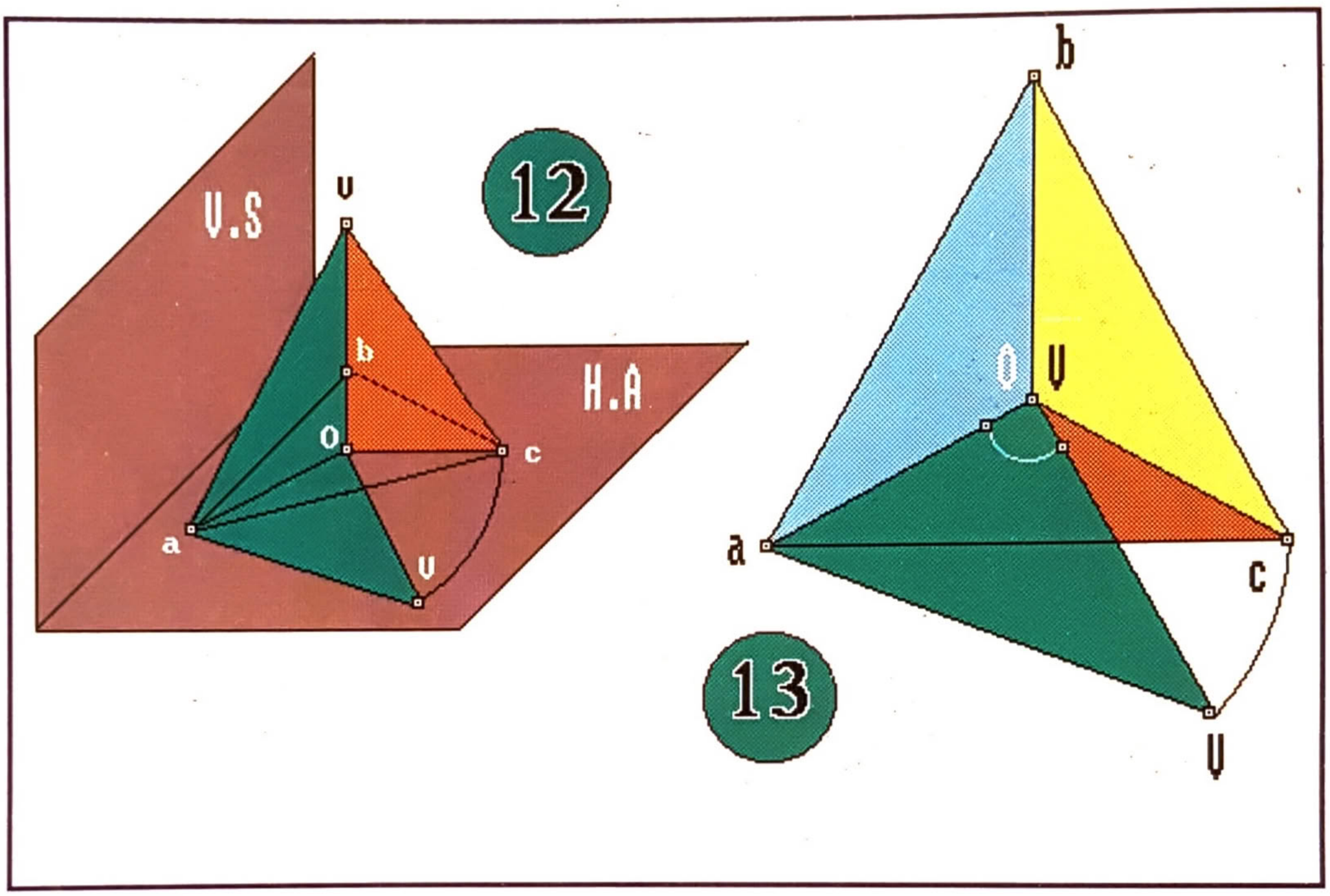

V
V
9
8
1
7
2
6
3
5
4
6
7
5
8
4
1
3
2
6
7
5
8
U
4
3
1
2
V
1
A
2

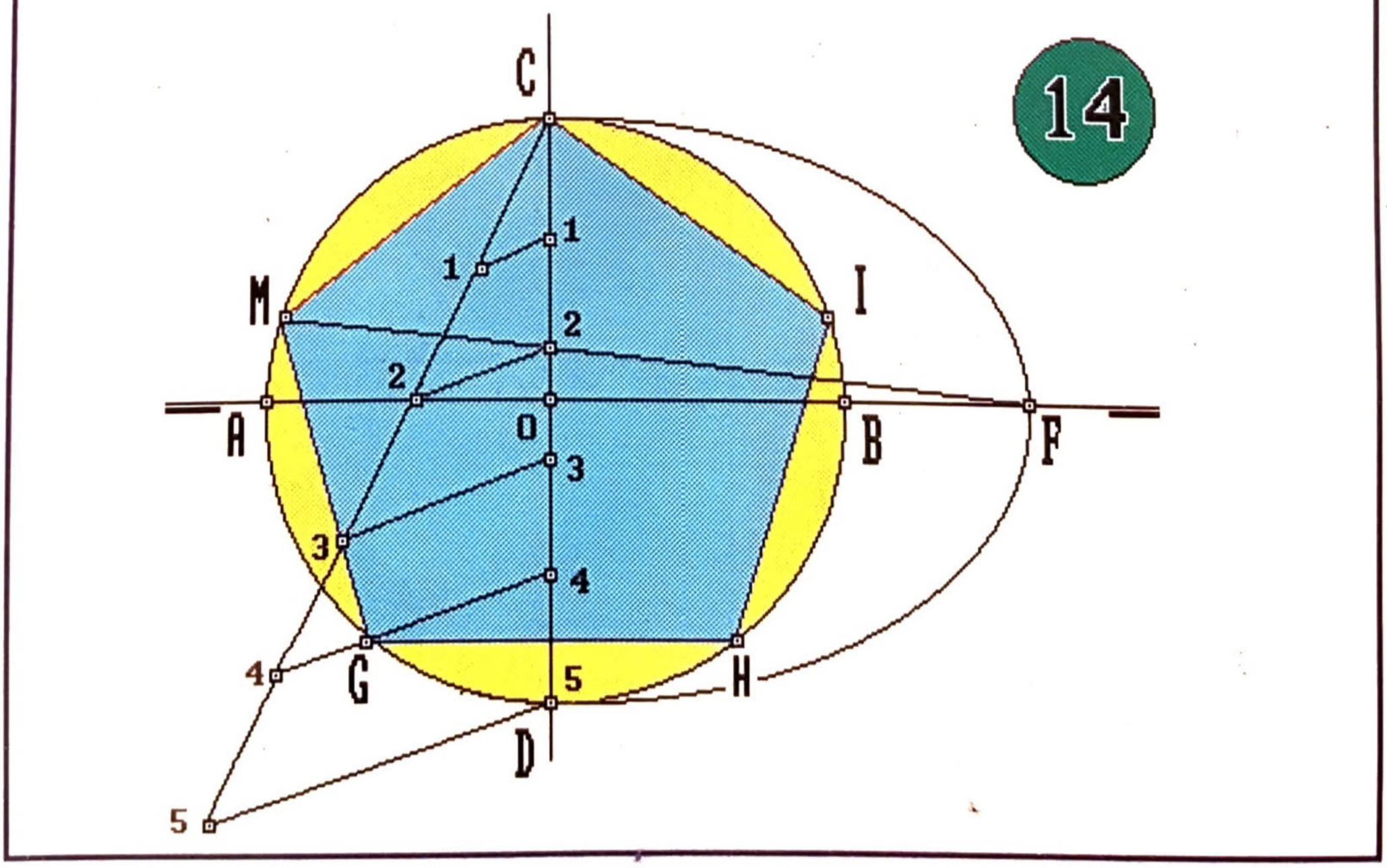

1 2 4 3
b
c
5 6 8 7
2 3 1 4
a
b
6 7 5 8
2
6
d
7
a
3
c
5
b
1
8
4

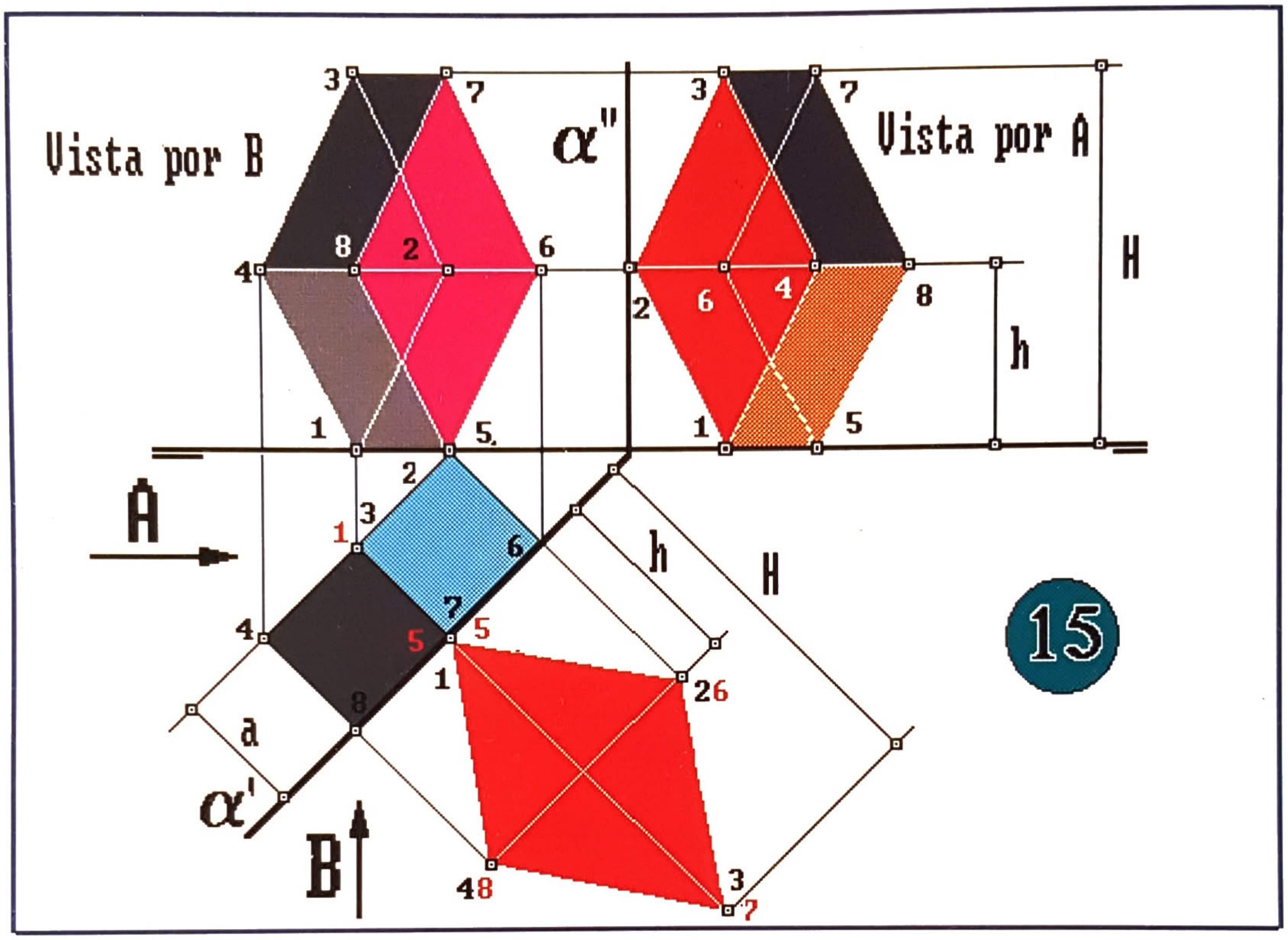
10

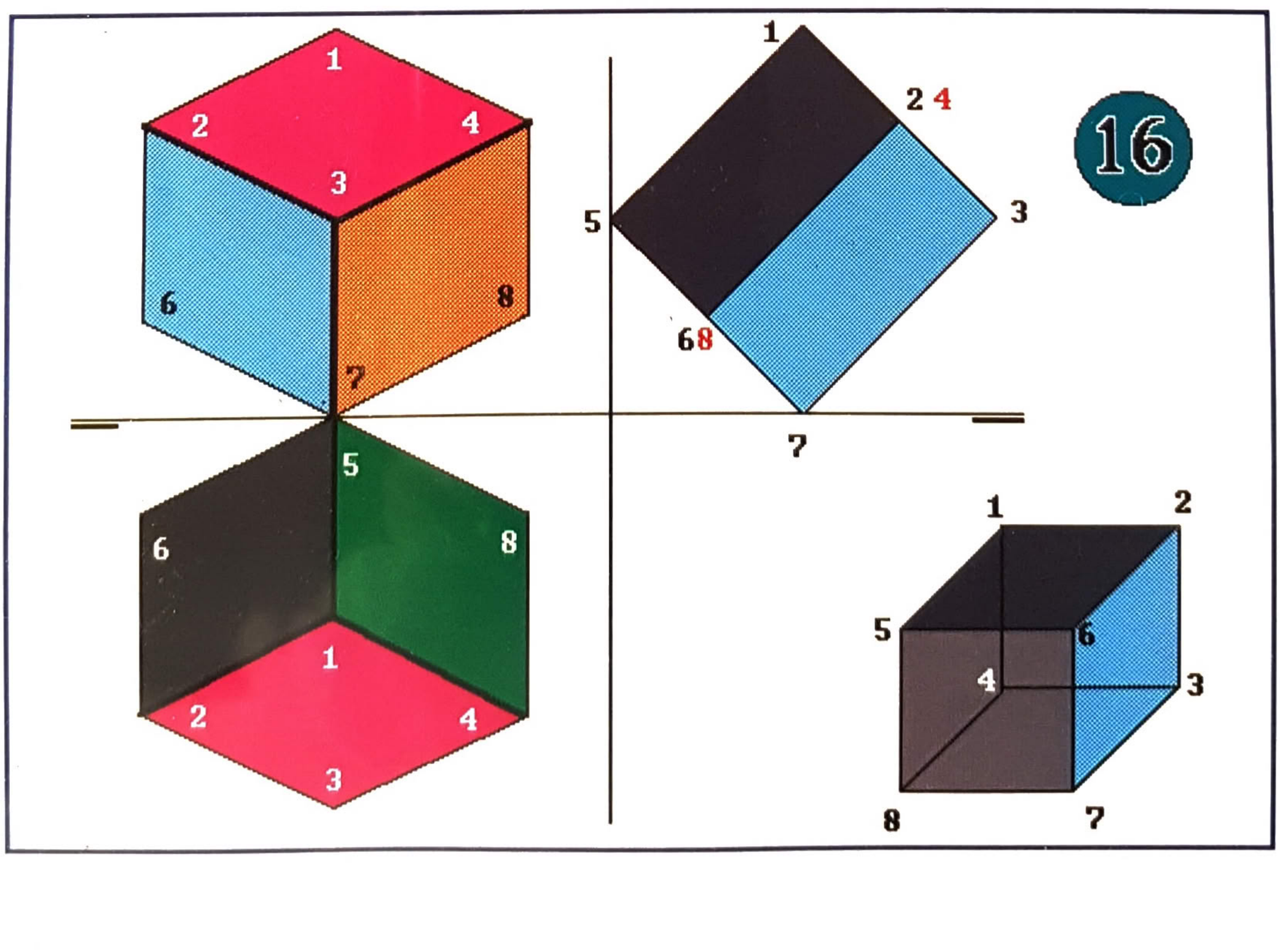

V''
V'''
0''
0'''
2 3 1 4 6 5
1 6 2 5 3 4
1
6
2
0'
5
V'
3
4

11


V.S
v
b
O
c
a
v
H.A
12
b
V
a
c
V
13


C
1
1
M
I
2
2
A
O
B
F
3
3
4
4
G
5
H
D
5
14


Vista por B
α"
Vista por A
H
h
A
B
a
α'
15


16

Secciones planas.

SECCIONES PLANAS

La sección producida en un poliedro por un plano es, el polígono formado por la intersección de dicho plano con las distintas caras del poliedro.

Los vértices del polígono intersección se encuentran en las aristas del poliedro.

Para hallar el polígono intersección entre un plano y un poliedro, hallaremos la intersección de las distintas aristas del poliedro, con el plano secante y uniendo ordenadamente dichos puntos, obtendremos el polígono solicitado.

FIG. Nº1.

Sección producida por un plano α paralelo al horizontal de proyección con un tetraedro regular apoyado en otro plano horizontal.

El plano secante α corta a las aristas laterales del tetraedro en los puntos 1, 2 y 3.

La unión de las proyecciones horizontales de dichos puntos, determinan el triángulo equilatero formado por los vértices 1', 2' y 3'; dicho triángulo es la verdadera magnitud de la sección producida en el tetraedro por el plano α, ya que éste es paralelo al horizontal de proyección y a la base del tetraedro.

FIG. Nº2.

Sección producida por un plano oblicuo α (genérico) a un prisma cuya base es un octógono regular apoyado en el plano horizontal.

En este caso la traza horizontal α' del plano secante corta al polígono de la base del prisma en A' y B'. (Estos puntos pertenecen a la intersección.).

Para encontrar los restantes puntos comunes entre el plano secante y la superficie poliédrica hallaremos las sucesivas intersecciones entre las aristas laterales del prisma con el plano; en nuestro caso hemos empleado planos paralelos al vertical que pasen por ellas.

De esta forma obtendremos los puntos C, D, E, F y G que unidas ordenadamente incluyendo los puntos A y B obtendremos las proyecciones del polígono intersección, entre el plano secante y el poliedro.

NOTA: En la fig. se pueden ver las tres proyecciones del polígono intersección pero en ninguno de los casos se representa en su verdadera magnitud, para ello deberíamos efectuar el abatimiento del plano α sobre cualquiera de los planos de proyección. (Ver tema de abatimientos).

FIG. Nº3.

Hexaedro apoyado por una de sus caras en un plano α paralelo al 2º bisector cortado por un plano β paralelo a L.T.

Estos casos se resuelven fácilmente utilizando la vista de perfil.

El plano secante β corta al hexaedro según el cuadrilatero.

ABCD (Representado como rectángulo en sus proyecciones tanto horizontal como vertical y según una recta en el plano de perfil).

FIG. Nº4.

Sección de una pirámide recta de base octogonal apoyada en un plano horizontal por un plano proyectante vertical α.

El plano proyectante vertical α (α', α'') produce una sección que se proyecta verticalmente sobre la traza α'', según una recta.

La proyección sobre los planos horizontal y de perfil son los polígonos limitados por los vértices ABCDEFG y H. Los puntos C y G se obtendran con el auxilio del plano de perfil.

Para obtener la verdadera magnitud de la sección debemos abatir el plano proyectante α sobre cualquiera de los planos de proyección.

FIG. Nº5.

Sección producida en un prisma recto de base pentagonal por un plano α paralelo al 2º bisector.

Al cortar el plano α al polígono de la base en los puntos 4 y 5, dichos puntos pertenecen a la intersección.

Las proyecciones de los puntos 1, 2 y 3 se obtienen en el plano de perfil en las intersecciones entre las aristas A, B y C con el plano secante α, en su proyección α'''.

FIG. Nº6.

Sección producida en una pirámide recta de base hexagonal regular apoyada en el plano horizontal por un plano a que pasa por L.T., definido por el punto P.

Una vez representada la pirámide en sus tres proyecciones situamos el plano α en su proyección de perfil (pasa por **L**.T. y por P''').

La proyección α'''' corta a todas las aristas de la pirámide en los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

FIG. Nº7.

Intersección entre un plano proyectante vertical α y una pirámide oblicua.

Se resuelve como en el caso de la fig. nº4. Nótese la utilidad de la representación de la pirámide en el plano de perfil, especialmente para la obtención del punto 2 ya que la arista VB está contenida en un plano de perfil.

FIG. Nº8.

Intersección entre el primer plano bisector y un prisma de sección cuadrangular limitado por los planos HA y VS sabiendo que todas las aristas laterales son paralelas al 2º bisector.

Se resuelve como el caso de la fig. nº6.

FIGS. Nº9 y Nº10.

En el caso de la fig. 9 y 10 hemos resuelto el caso de obtener los puntos de intersección entre una recta y una superficie poliédrica.

En ambos casos hemos hecho pasar por la recta t, un plano proyectante, para obtener la sección producida entre el plano y el poliedro.

En las proyecciones horizontales de ambas figs. encontramos los puntos A y B. (Intersección de la proyección horizontal t' de la recta t con la sección anteriormente determinada).

Una vez obtenidas las proyecciones horizontales de los puntos A y B (Intersecciones de la recta t con los poliedros); procederemos a obtener las proyecciones vertical y de perfil.

FIG. Nº11.

Intersección entre una recta t, perpendicular al plano horizontal, y un poliedro.

Para resolver estos casos tomaremos un plano auxiliar α, proyectante horizontal, cuya traza α' pase por la proyección horizontal t' de la recta t.

La proyección α' corta a las aristas del poliedro en los puntos 1', 2' y 3' representados en su proyeccion horizontal.

Las proyecciones verticales de las rectas limitadas por los puntos 1'', 2'' y 3'' cortarán a la proyección vertical de la recta t en los puntos M y N.

Dichos puntos serán los puntos de intersección entre la recta t y el poliedro.

FIG. Nº12.

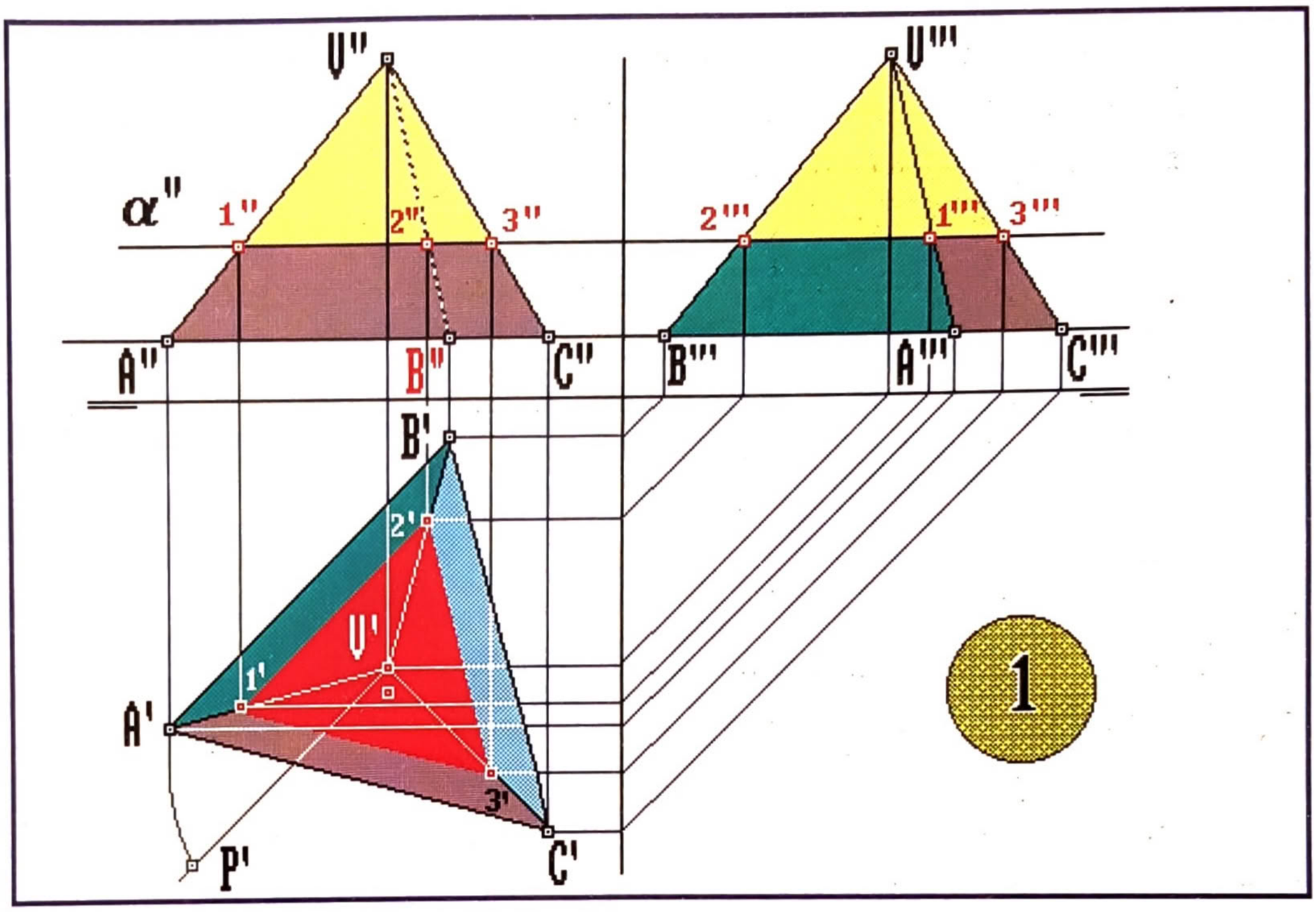
Sección producida en un prisma oblicuo por un plano genérico α.

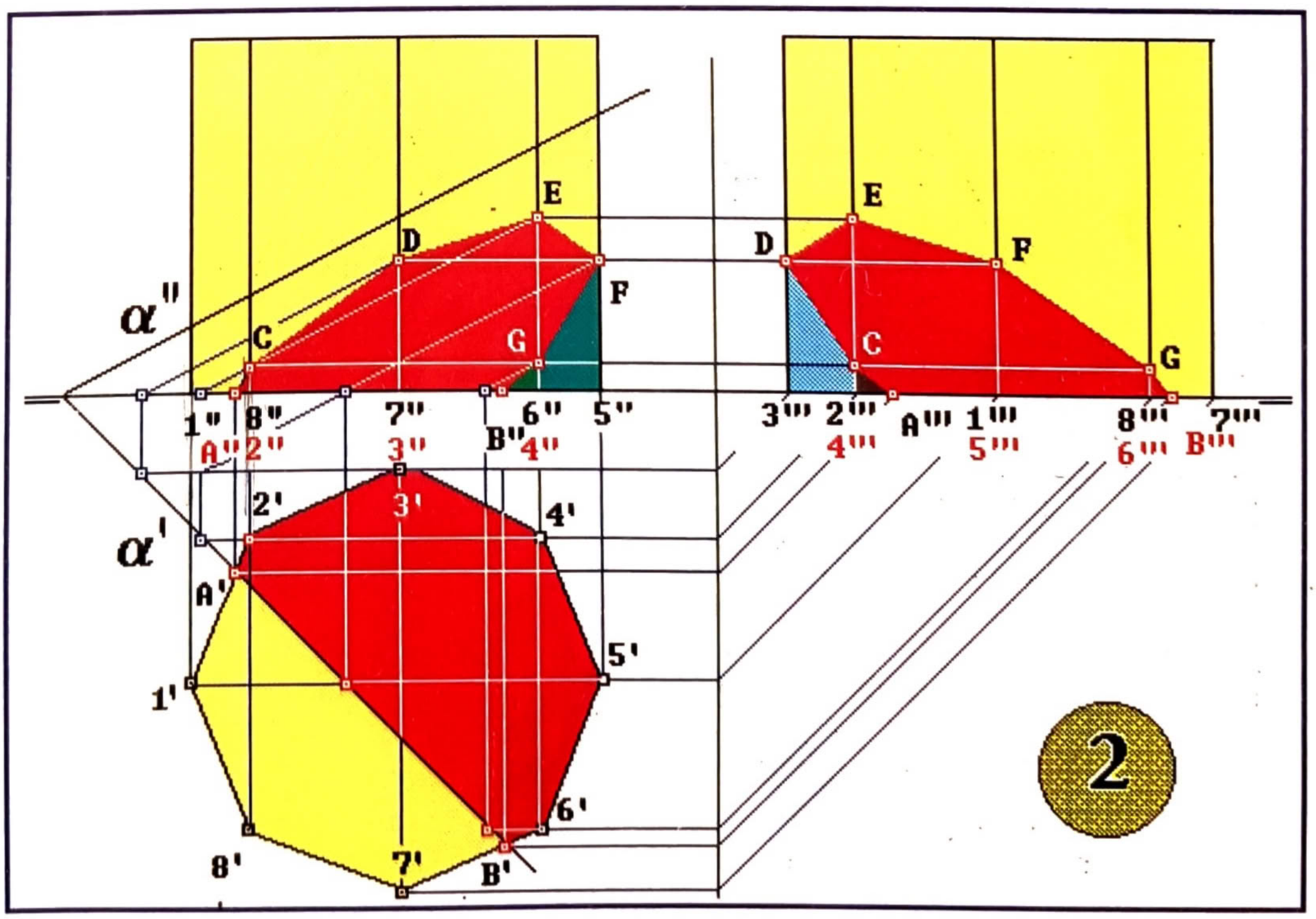
Este ejercicio puede resolverse, por el método de intersección entre las aristas laterales del prisma y el plano, no obstante, hemos creído conveniente utilizar el sistema de "cambios de plano".

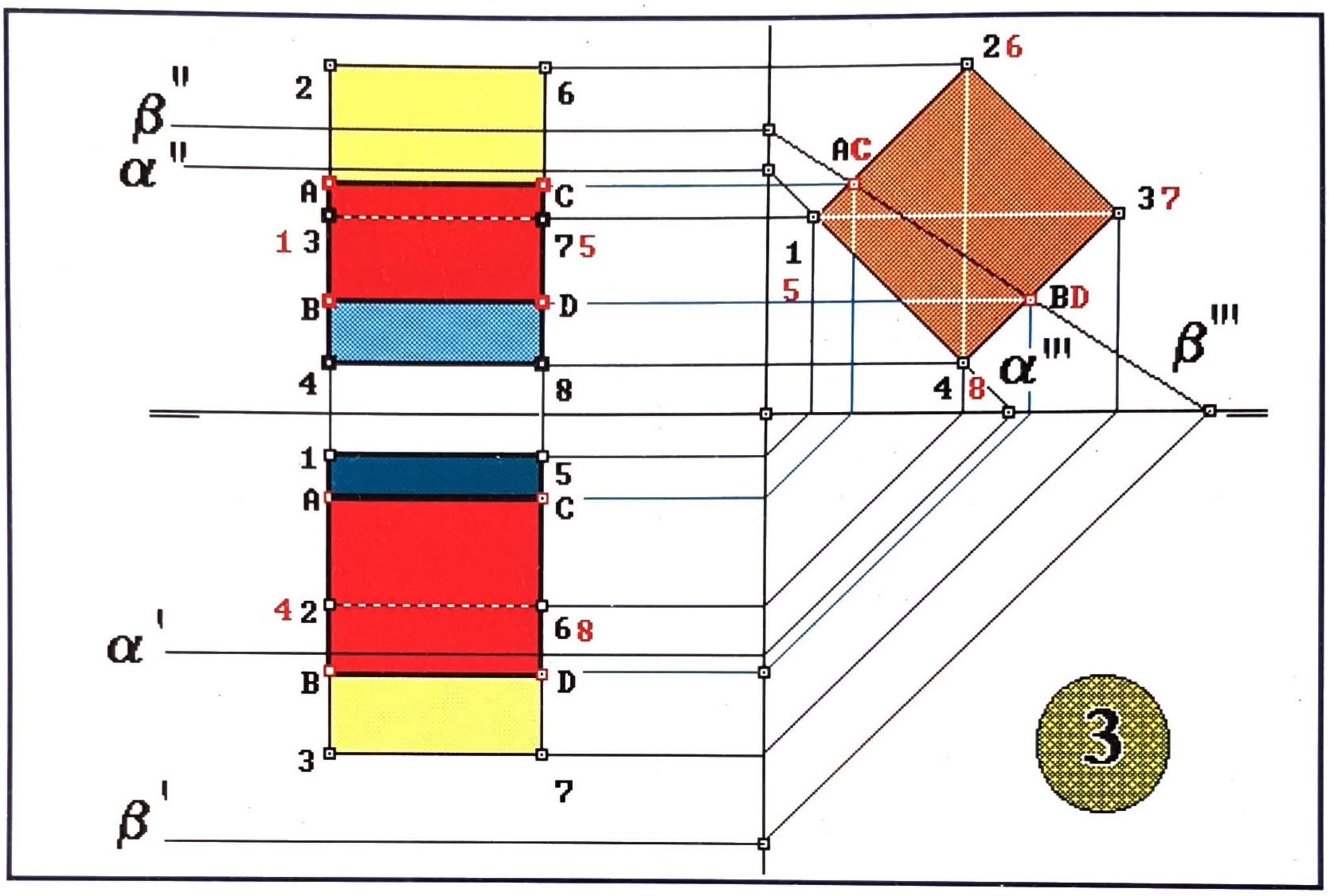
En nuestro caso hemos cambiado el plano α, eligiendo una nueva L.T. que lo transforma en proyectante vertical.

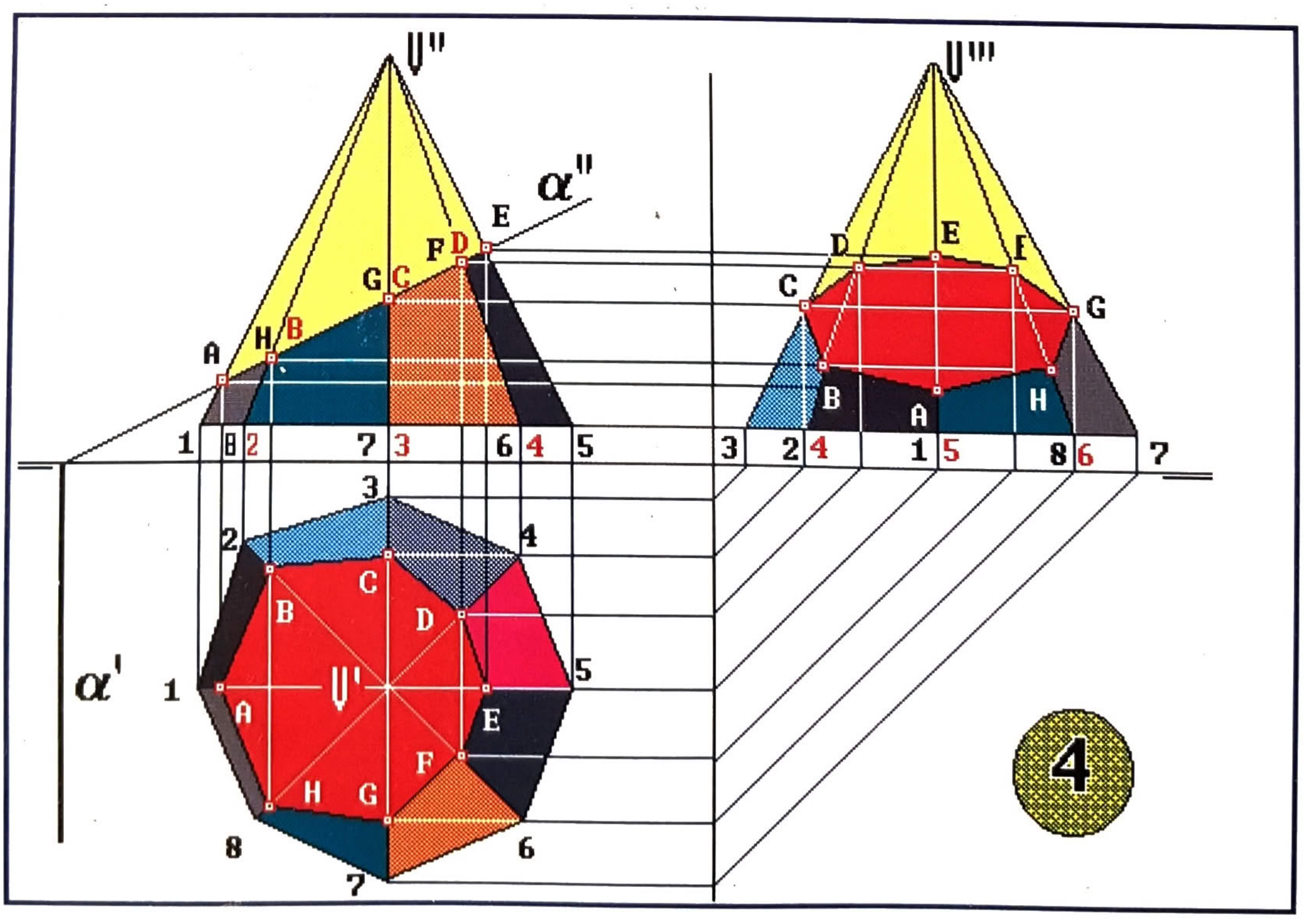
De esta forma obtenemos sobre la nueva traza vertical del plano la sección del prisma, representada por el segmento ABC.

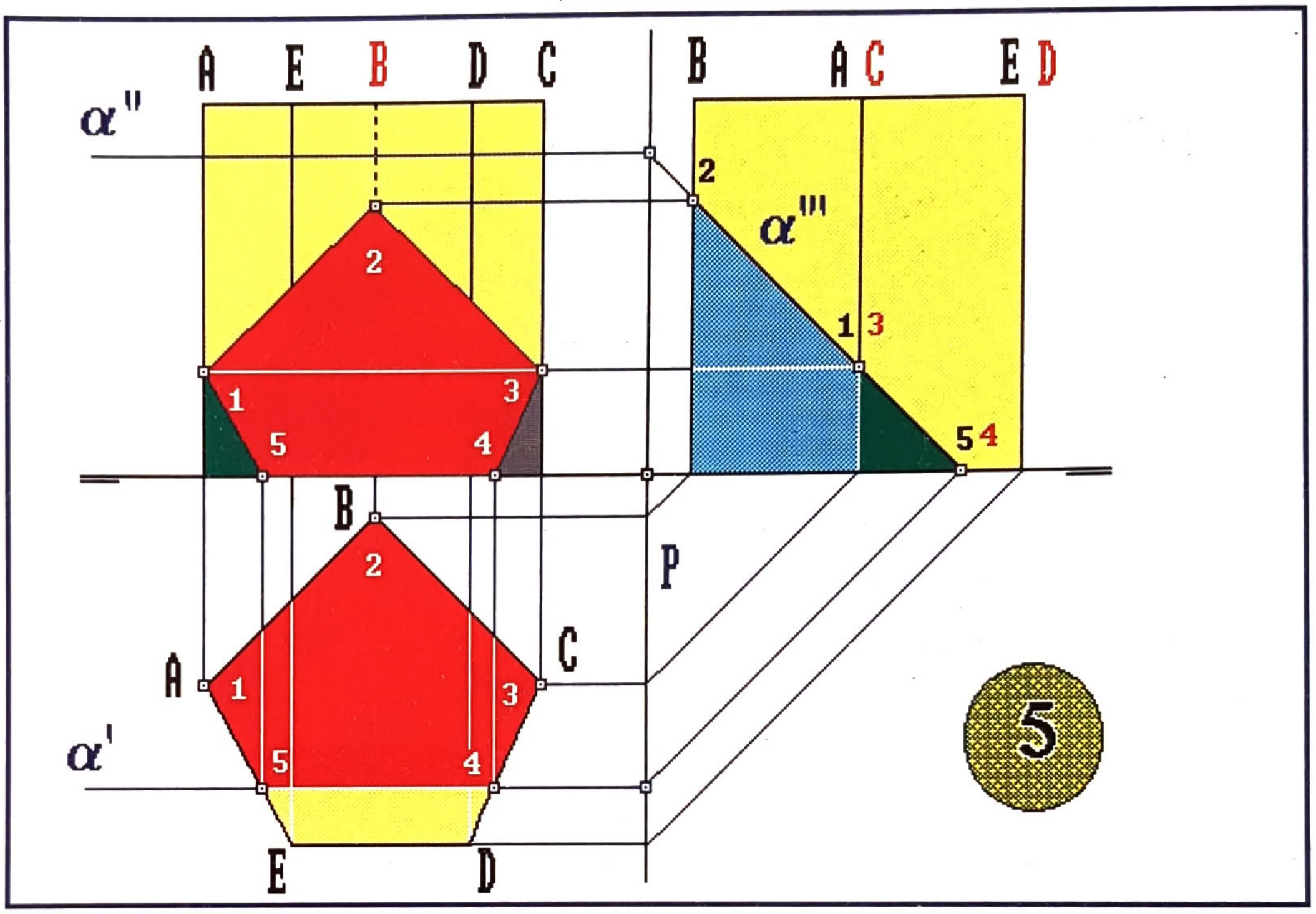
La sección obtenida ABC la referiremos tanto a la proyección horizontal como a la proyección vertical antigua, quedando resuelto el problema.

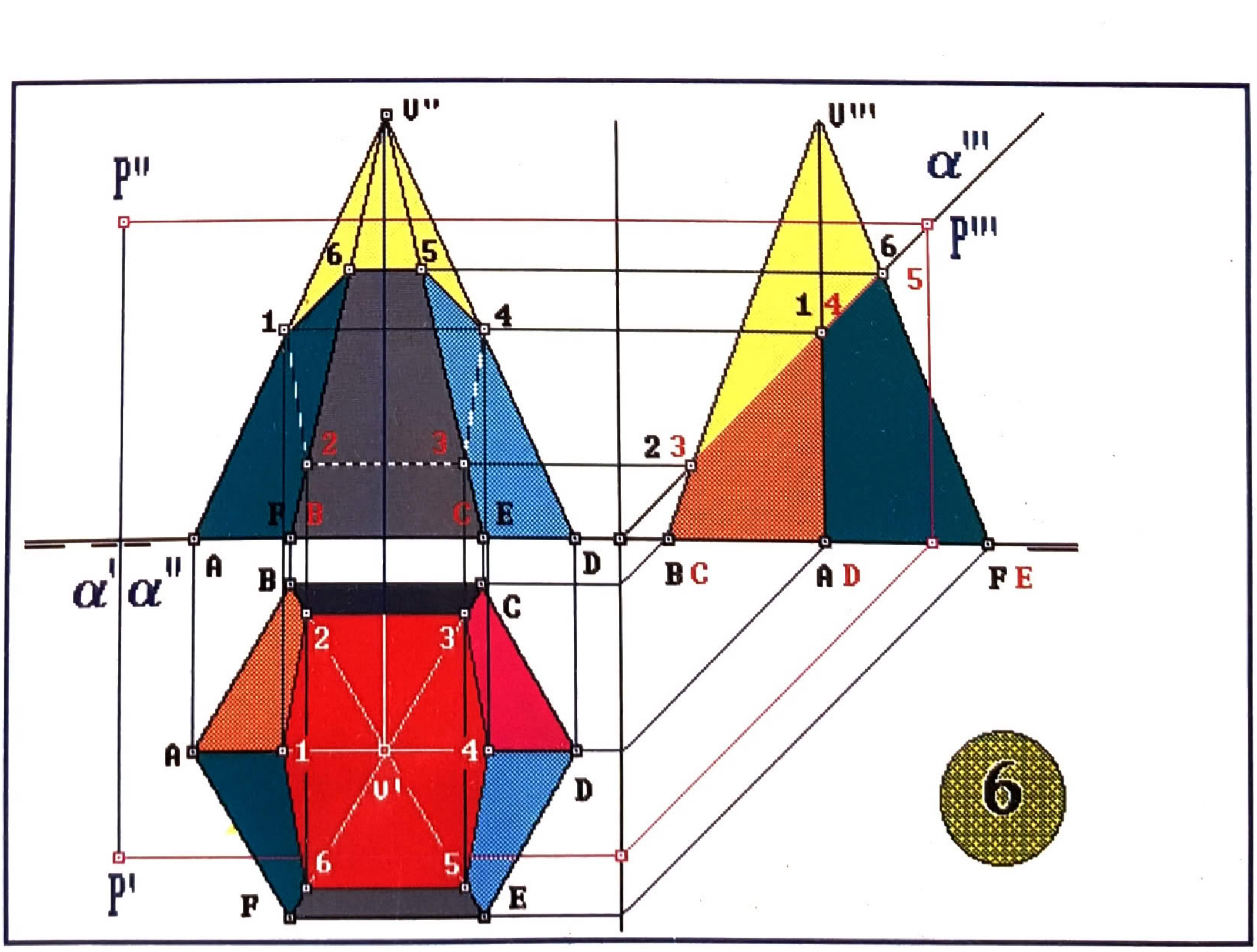

V''
α''
1''
2''
3''
A''
B''
C''
B'
2'
V'
1'
A'
3'
P'
C'
V'''
2'''
1'''
3'''
B'''
A'''
C'''
1

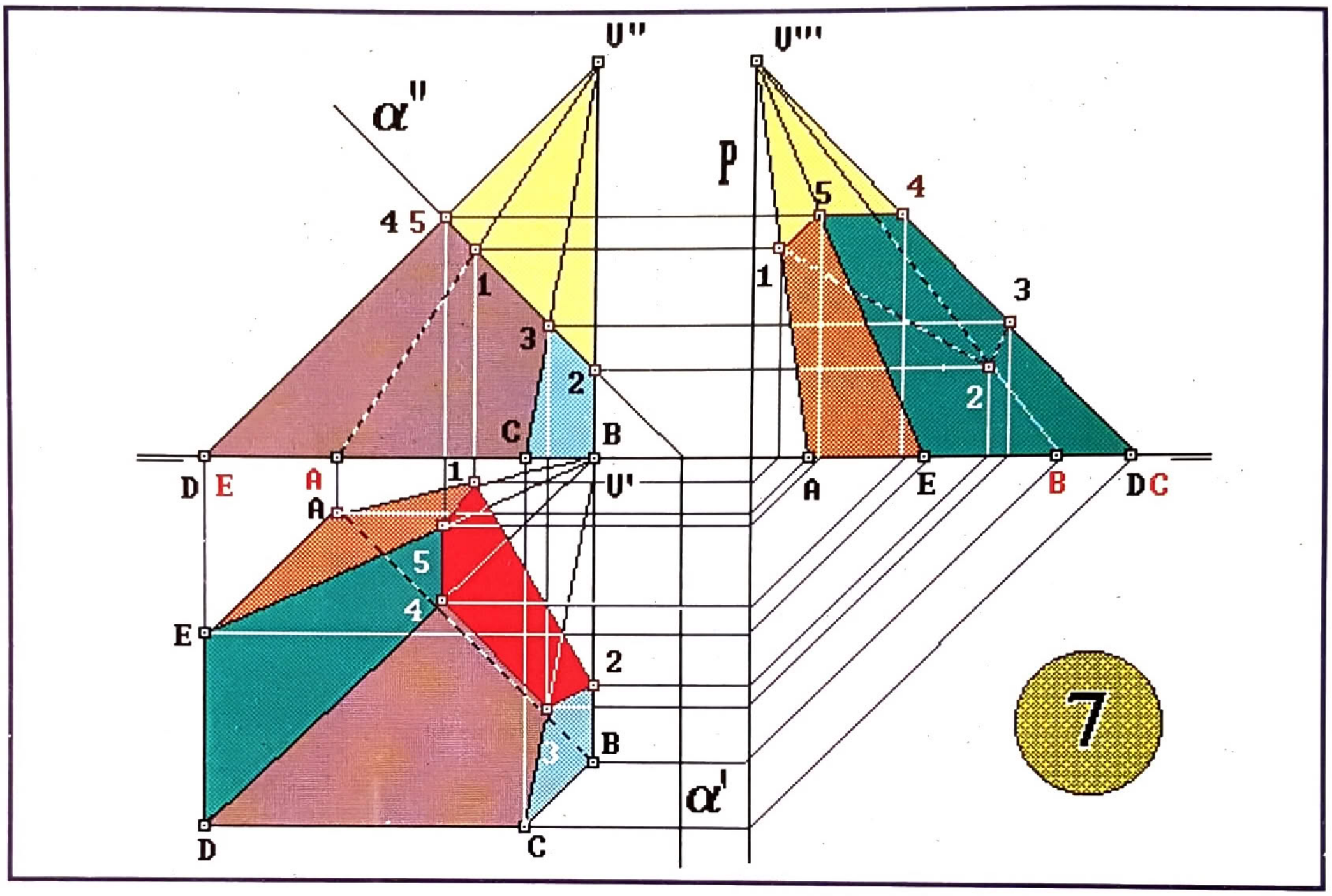

E
D
F
α''
C
G
1''
8''
7''
6''
5''
A''
2''
3''
B''
4''
2'
3'
4'
α'
A'
5'
1'
6'
8'
7'
B'
D
E
F
C
G
3''' 2'''
A''' 1'''
8''' 7'''
4'''
5'''
6''' B'''
2

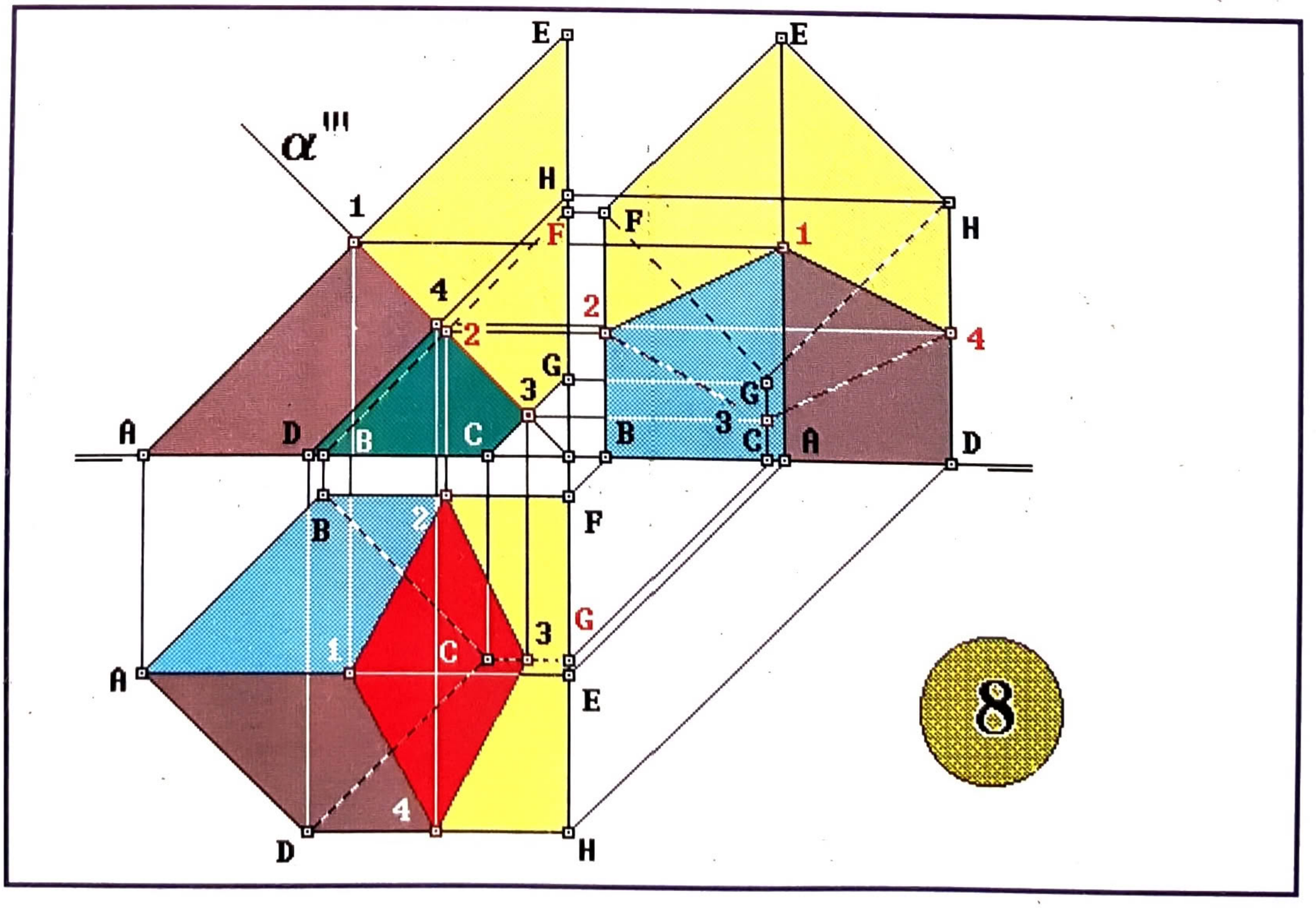

β''
α''
2
6
A
C
1 3
7 5
B
D
4
8
1
5
4 2
6 8
3
7
α'
β'
2 6
AC
3 7
BD
4 8
α'''
β'''
3

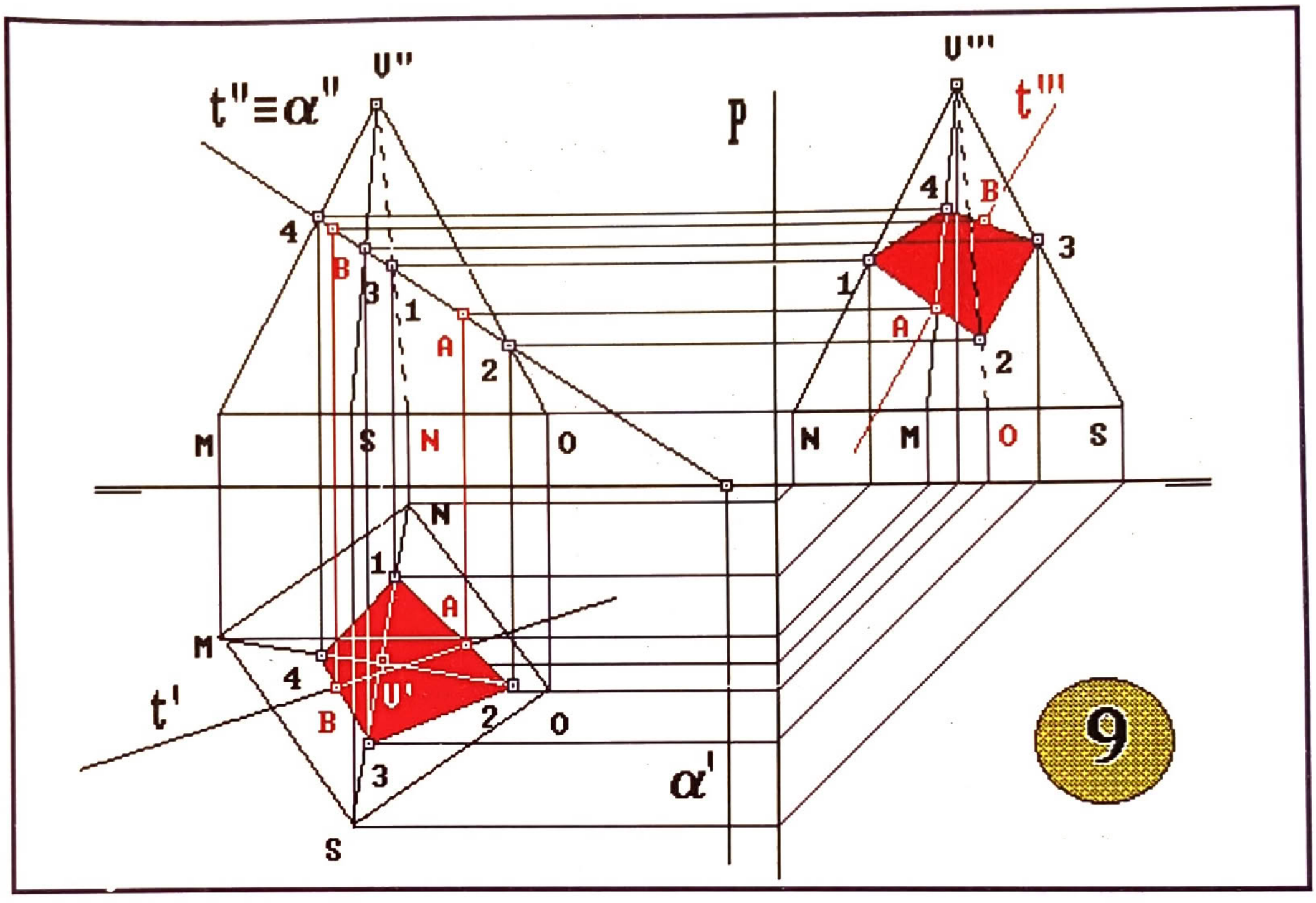

U''
α''
E
F
D
G
C
A
H
B
1
8
2
7
3
6
4
5
3
2
4
1
5
8
6
7
U'''
C
D
E
F
G
B
A
H
α'
U'
1
2
3
4
5
6
7
8
A
B
C
D
E
F
G
H
4

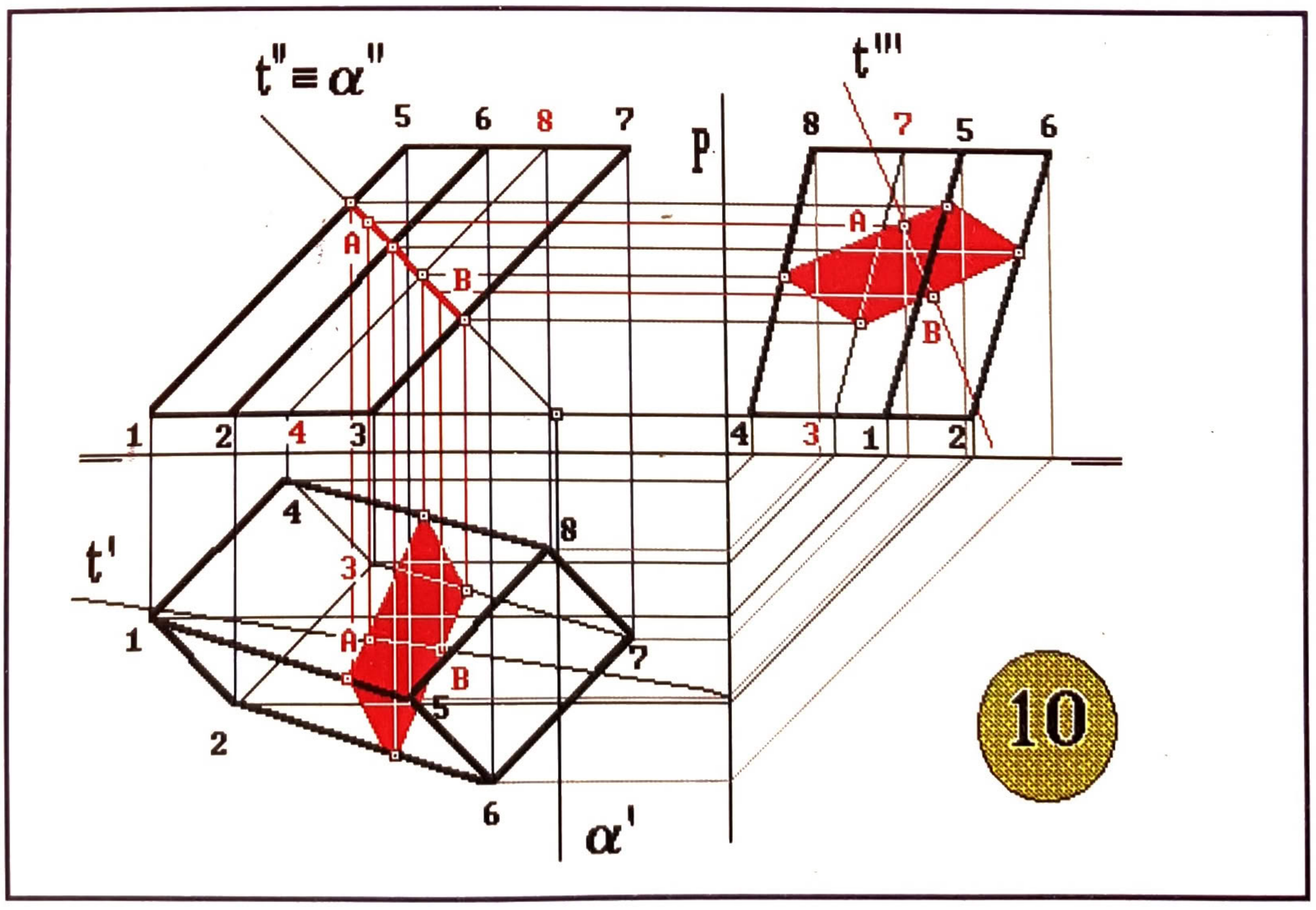

A E B D C
α''
B A C E D
2
α'''
1 3
5 4
1
3
5
4
2
B
P
C
A
1
3
α'
5
4
E
D
5

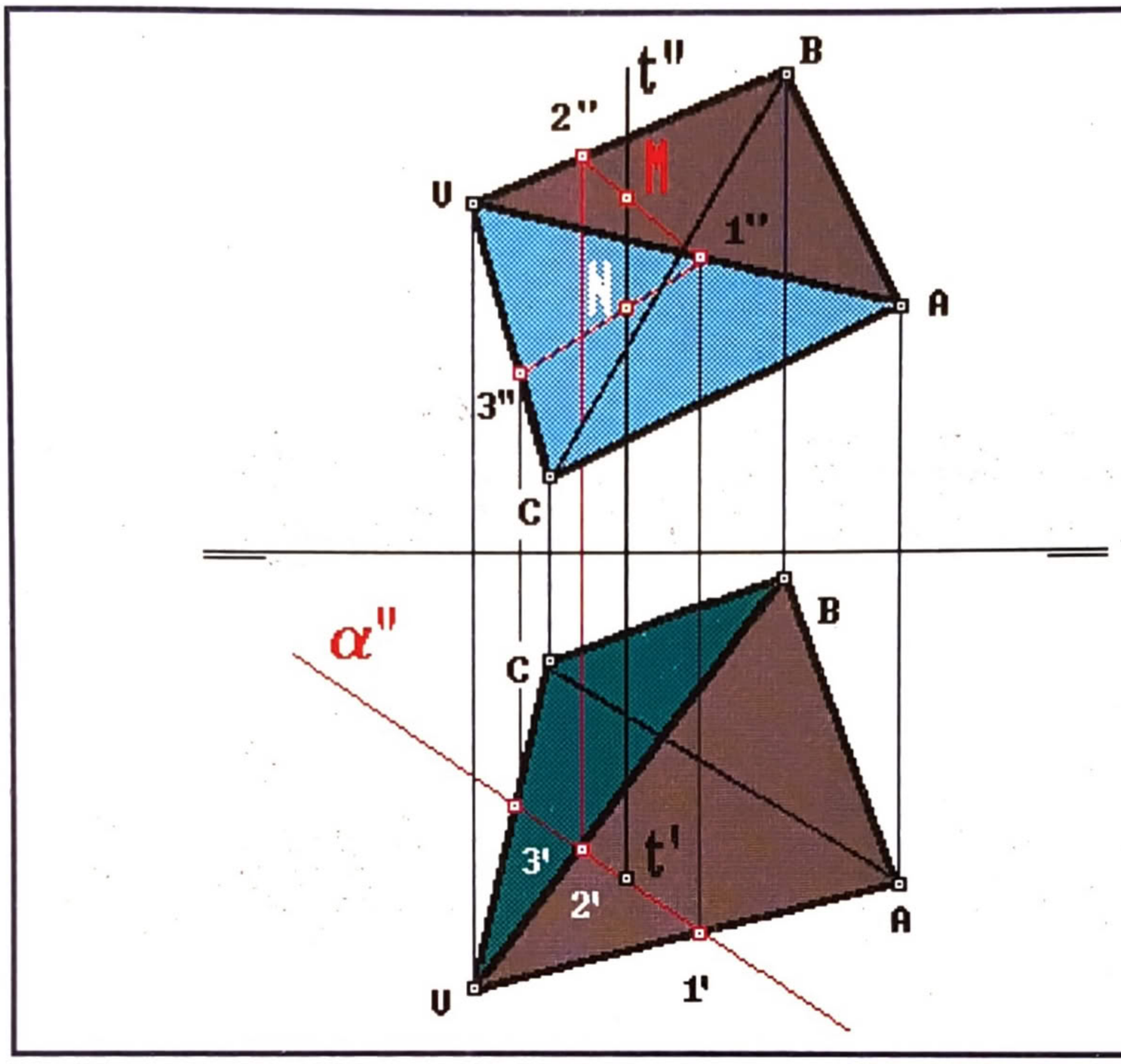

V''
V'''
P''
α'''
P'''
6
5
1
4
2 3
F B C E
D
2 3
1 4
5
6
BC
A D
F E
α' α''
A
B
C
2
3
D
A
1
4
V'
D
6
5
P'
F
E
6


U''
U'''
α''
P
4 5
1
3
2
C
B
D E
A
1
U'
A
5
4
E
2
B
3
D
C
α'
5
4
1
3
2
A
E
B
DC
7

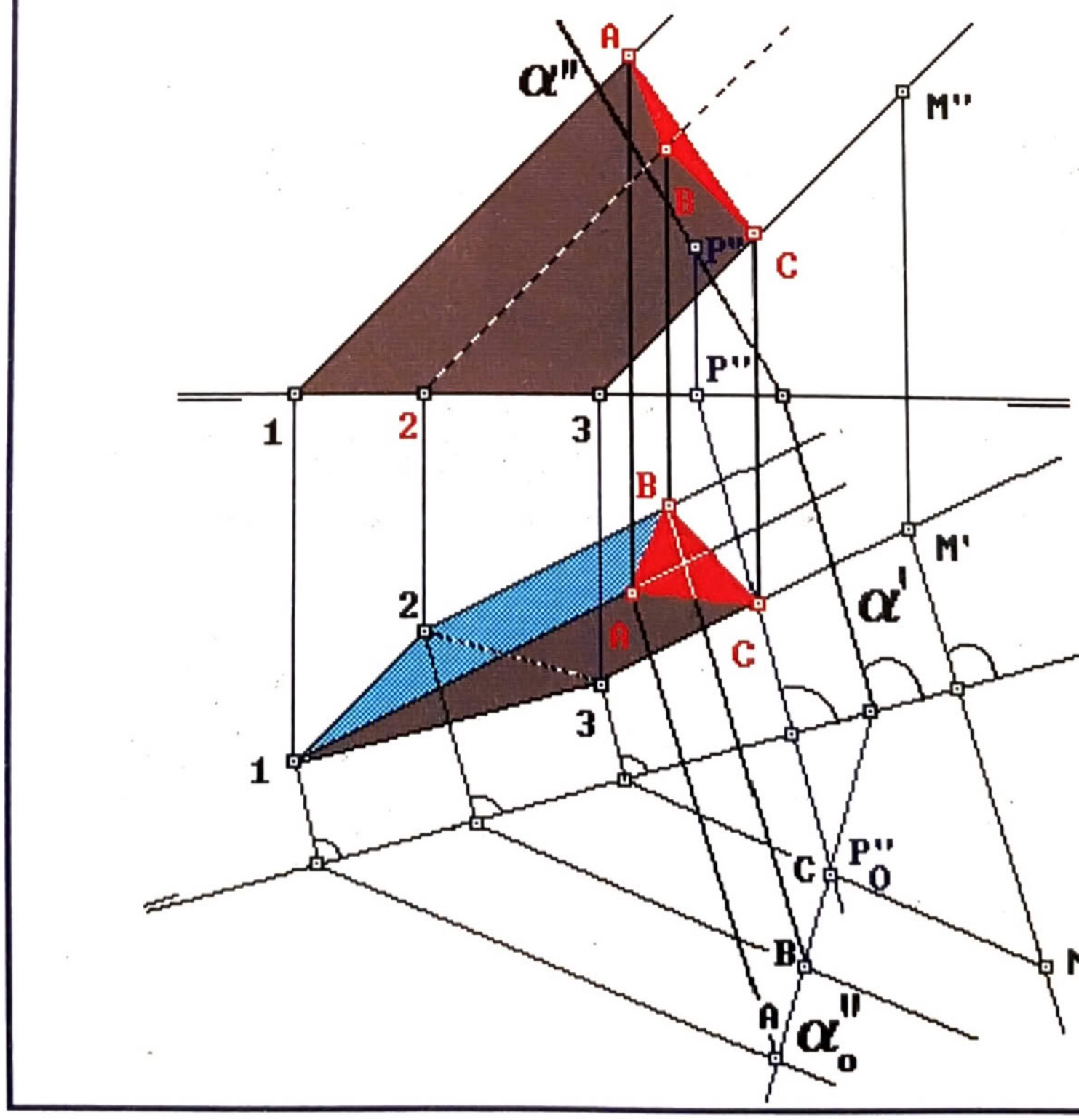

E
E
α'''
H
F
F
1
H
1
4
2
2
4
G
G
3
3
A
D
B
C
B
C
A
D
F
2
B
G
3
1
C
A
E
4
D
H
8


t"≡α"
V"
P
V'''
t'''
4
B
3
1
A
2
M
S
N
O
N
M
O
S
t'
α'
9


t"≡α"
t'''
P
5
6
8
7
A
B
1
2
4
3
8
7
5
6
t'
α'
10



11



12

Desarrollos y transformadas de poliedros y cuerpos de revolución.

DESARROLLOS Y TRANSFORMADAS DE POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCION

Este tema podemos considerarlo como ampliación de los dos estudiados anteriormente: "Representación de prismas, poliedros y pirámides" y "Secciones planas".

El desarrollo de una superficie poliédrica consiste en extender ésta sobre un plano, quedando cada cara situada una al lado de la otra.

Las superficies tanto cilíndricas, como cónicas son también desarrollables; esta propiedad es consecuencia de la generación; pues las distintas posiciones de las generatrices podemos considerarlas como aristas de la superficie poliédrica inscrita en dicha superficie cilíndrica o cónica.

Para resolver, en la práctica, el desarrollo de un cuerpo de revolución, sustituiremos la curva directriz de la superficie por una línea poligonal inscrita y haciendo pasar planos por los lados de dicha poligonal y las distintas generatrices, la superficie cilíndrica quedará sustituida por una superficie poliédrica inscrita en ella.

Cuanto mayor sea el número de lados del polígono inscrito en la curva directriz mayor será la aproximación del desarrollo.

Toda línea contenida en una superficie poliédrica o cuerpo de revolución se transformará en otra distinta en el plano desarrollado. Esta nueva línea la denominaremos "transformada de la primera".

FIG. Nº1 y Nº2.

Desarrollo lateral de un prisma recto de base triangular irregular al ser cortado por un plano α proyectante vertical.

En la fig. nº1 hemos representado las tres vistas del prisma; la traza vertical α" del plano α, corta a las aristas laterales A, B y C del prisma en 1", 2" y 3" siendo éstos, puntos de la intersección entre el poliedro y el plano secante.

En la fig. nº2 hemos trazado un rectángulo cuya base es igual al perímetro de la proyección horizontal de la base del poliedro (Triángulo A' B' C') Su altura es igual a la del poliedro.

Los puntos $1_0 2_0 3_0 1_0$ de la fig. nº2 se corresponden con las proyecciones 1" 2" 3" de la proyección vertical del prisma, los puntos $1_0 2_0 3_0 1_0$ unidos forman una poligonal que es la intersección entre el plano secante y el poliedro desarrollado. (Transformada).

FIG. Nº3 y Nº4.

Desarrollo total de una pirámide irregular de base triangular y la transformada de la sección producida al ser cortada por un plano horizontal β.

En la fig. nº3 hemos representado las proyecciones horizontal y vertical de la pirámide limitada por los vértices ABCV así como la traza vertical β" del plano horizontal β.

El desarrollo total de la pirámide estará formado por 4 triángulos.

El triángulo de la base ABC, en nuestro caso, equilátero se representará en verdadera magnitud por estar contenido en un plano paralelo al horizontal de proyección.

Los triángulos ACV y ABV están contenidos en planos oblicuos y el triángulo BCV está contenido en un plano proyectante horizontal.

El conjunto de los tres triángulos forman la superficie lateral de la pirámide.

Para obtener el desarrollo lateral de la pirámide y considerando que éste está formado por 3 triángulos, deberemos hallar las verdaderas magnitudes de sus lados VA, VB y VC (Ninguno de ellos están representados en verdadera magnitud ya que tanto sus proyecciones horizontales como verticales son oblicuas respecto a L.T.).

En la fig.nº3 hemos levantado perpendiculares a las aristas VA, VB y VC en los puntos A, B y C respectivamente; sobre estas aristas hemos tomado las distancias m, n y s (diferencias de alejamiento) entre los puntos AV, BV y CV obteniéndose de esta forma los puntos A_0, B_0 y C_0.

La unión de la proyección V" del vértice con los puntos antes mencionados nos dará las verdaderas magnitudes de las aristas laterales.

Conociendo las verdaderas magnitudes de las aristas laterales y sabiendo que las aristas AB, AC y BC de la base están representadas en verdadera magnitud en el plano horizontal sólo nos queda trazar 3 triángulos conocidos sus lados, en la fig. nº4 la solución $V_0 A_0 B_0 C_0 A_0$ (Desarrollo lateral).

El desarrollo lateral complementado con el triángulo equilátero de la base A'B'C' formará el desarrollo total.

La línea $a_0\, b_0 c_0\, a_0$ de la fig. nº4 es la transformada de la sección de la pirámide al ser cortada por el plano β paralelo al horizontal.

La superficie limitada por los vértices $V_0\, a_0\, b_0 A_0\, c_0\, a_0$ corresponden al desarrollo total de la pirámide apoyada en el plano horizontal β.

FIG. Nº5 y Nº6.

Desarrollo total de un prisma de base hexagonal regular apoyado en el plano horizontal, sabiendo que sus aristas están contenidas en planos frontales.

NOTA: Desarrollo sólo de la parte comprendida entre el plano horizontal y el plano secante α, proyectante vertical.

El procedimiento empleado para resolver estos casos consiste en cortar el poliedro por un plano perpendicular a las aristas laterales.

En nuestro caso hemos usado el plano β proyectante vertical, perpendicular a las aristas laterales del poliedro.

La traza β" corta a las aristas laterales en 1" 2" 3" 4" 5" y 6"; al abatir el plano β sobre el plano horizontal la fig. C es la verdadera magnitud de la sección producida entre el poliedro y el plano secante.

Para hallar el desarrollo de la parte de prisma comprendida entre el plano horizontal y el plano proyectante β (Ver fig. nº6), trazamos una recta MN y sobre esta recta trazamos perpendiculares por los puntos 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0 y 1_0.

Las distancias $1_0\ 2_0$ - $2_0\ 3_0$ -$3_0\ 4_0$ - $4_0\ 5_0$ - $5_0\ 6_0$ - $6_0\ 1_0$ se corresponden con las $1_0\, 2_0$ - $2_0\ 3_0$, etc. de la verdadera magnitud C de la sección producida entre el prisma y el plano secante β de la fig. nº5.

Sobre la recta MN y por los puntos $1_0\, 2_0\, 3_0\, 4_0 5_0$ y 6_0 tomaremos las distancias 1" a α", 2" a α" etc. y bajo la recta MN tomaremos las distancias 1" al plano horizontal y 2" al plano horizontal, etc.

Uniendo los puntos anteriormente indicados, nos darán dos poligonales (transformadas) que corresponderán a las intersecciones del poliedro con los planos β y horizontal de proyección.

FIG. Nº7 y Nº8.

En la fig. nº7 hemos representado una hélice circular y en la fig. nº8 su desarrollo.

Sea un cilindro de revolución, fig. nº7 y una hélice A,B,C,D,E,F... etc. trazada en él.

Esta hélice podemos prolongarla indefinidamente en la superficie, cortando varias veces a las mismas generatrices del cilindro.

Paso de la hélice: Se entiende por paso de la hélice, la magnitud AM de generatriz comprendida entre dos intersecciones sucesivas, este paso es constante en cada hélice y variable entre unas y otras.

Denominaremos "espira" al arco de hélice que abarca un paso.

En la fig. nº8 hemos representado el desarrollo del cilindro de diámetro D y la transformada de una espira. (Línea recta).

FIG. Nº9 y Nº10.

En la fig. nº9 hemos representado una hélice cónica y en la fig. nº10 su desarrollo.

Este caso es similar al anterior.

El desarrollo de la hélice sobre el sector circular implica conocer el ángulo α de dicho sector, ángulo que se obtiene según la fórmula:

$$\alpha^0 = 360 \cdot D/2g = 360 \cdot r/g$$

Desarrollo de un tronco de pirámide oblicua.

En la fig. nº11 hemos representado una pirámide oblicua cuya base es un polígono octogonal regular apoyado en el plano horizontal.

Este caso puede resolver el desarrollo de un cono oblicuo, ya que el polígono de la base puede ser un polígono inscrito en el círculo de la base. Cuanto mayor sea el número de lados del polígono inscrito mayor será la exactitud en el desarrollo del cono.

En la fig. nº11 hemos representado una pirámide oblicua cortada por un plano horizontal β.

Para la obtención del desarrollo de la pirámide sólo tenemos que conocer las verdaderas magnitudes de sus aristas laterales, ya que las aristas de la base se encuentran representadas en el plano horizontal en su verdadera magnitud por estar contenidas en dicho plano.

En la fig. nº11 sobre la arista V"7 hemos levantado perpendiculares en los puntos 7 y g, a partir de estos puntos y sobre dichas perpendiculares tomaremos las diferencias de alejamientos X e Y, respectivamente obteniéndose los puntos M y N.

La unión de los puntos V" y M, así como V" y N nos dará la verdadera magnitud de las aristas V7 y Vg.

Para mayor facilidad en la obtención de las verdaderas magnitudes de las distintas aristas (Ver fig. nº12) hemos trazado unos ejes coordenados.

Sobre el eje 0X trazamos las medidas de las proyecciones verticales V"1-V"2- V"3 etc., y sobre el eje 0Y trazaremos las medidas de las diferencias de alejamientos entre los puntos V'1-V'2-V'3 etc.

De esta forma encontraremos tanto en el eje 0X como en el eje 0Y los puntos 1-2-3... etc. que unidos entre sí nos darán los valores de las verdaderas magnitudes de las distintas aristas.

Conocidos estos valores, el desarrollo lateral de la pirámide consistirá en trazar una serie de triángulos conocidos sus tres lados.

En la fig. nº13 hemos representado el desarrollo de la pirámide así como la transformada producida por la intersección entre dicha pirámide y el plano horizontal β.

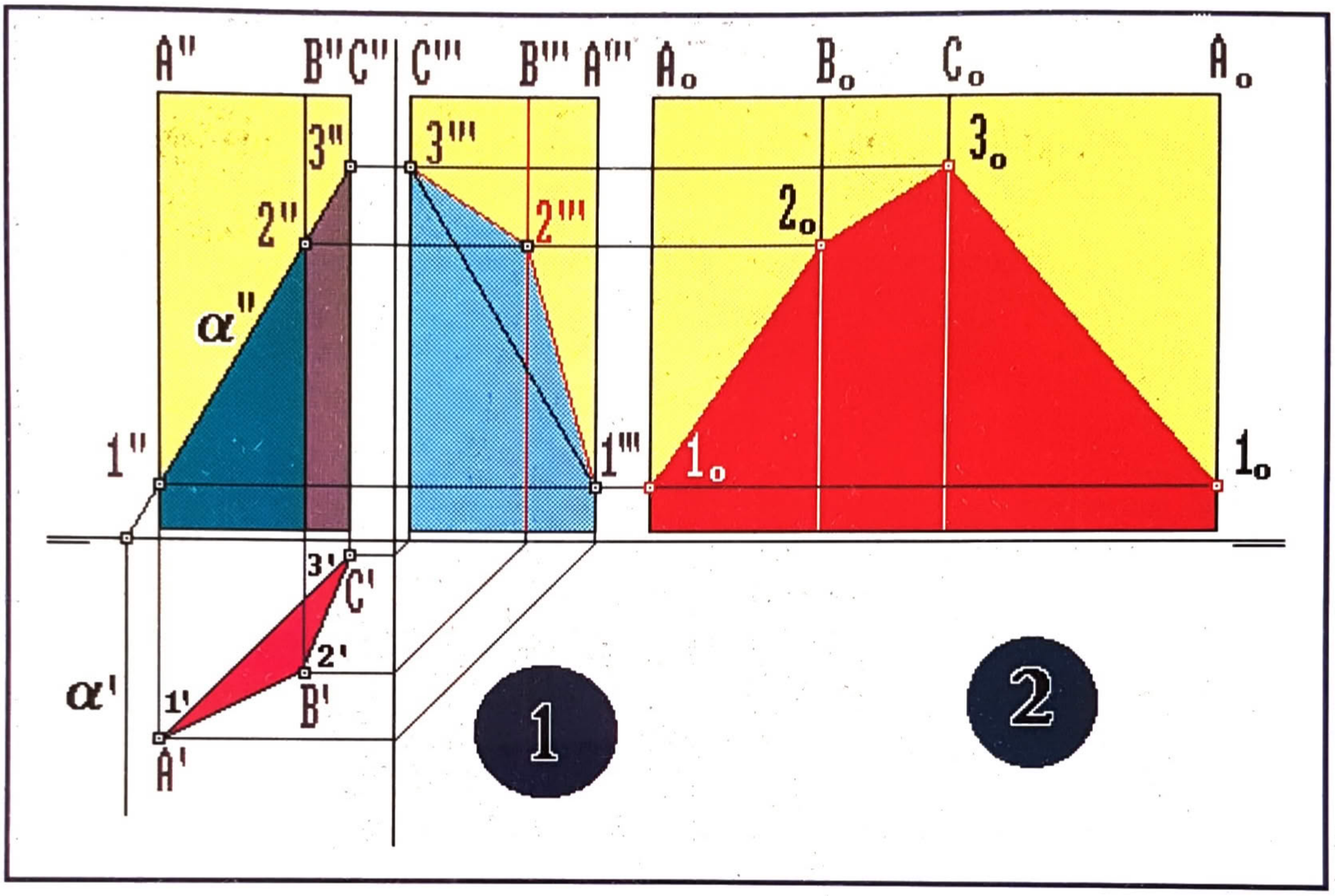
FIG. Nº14.

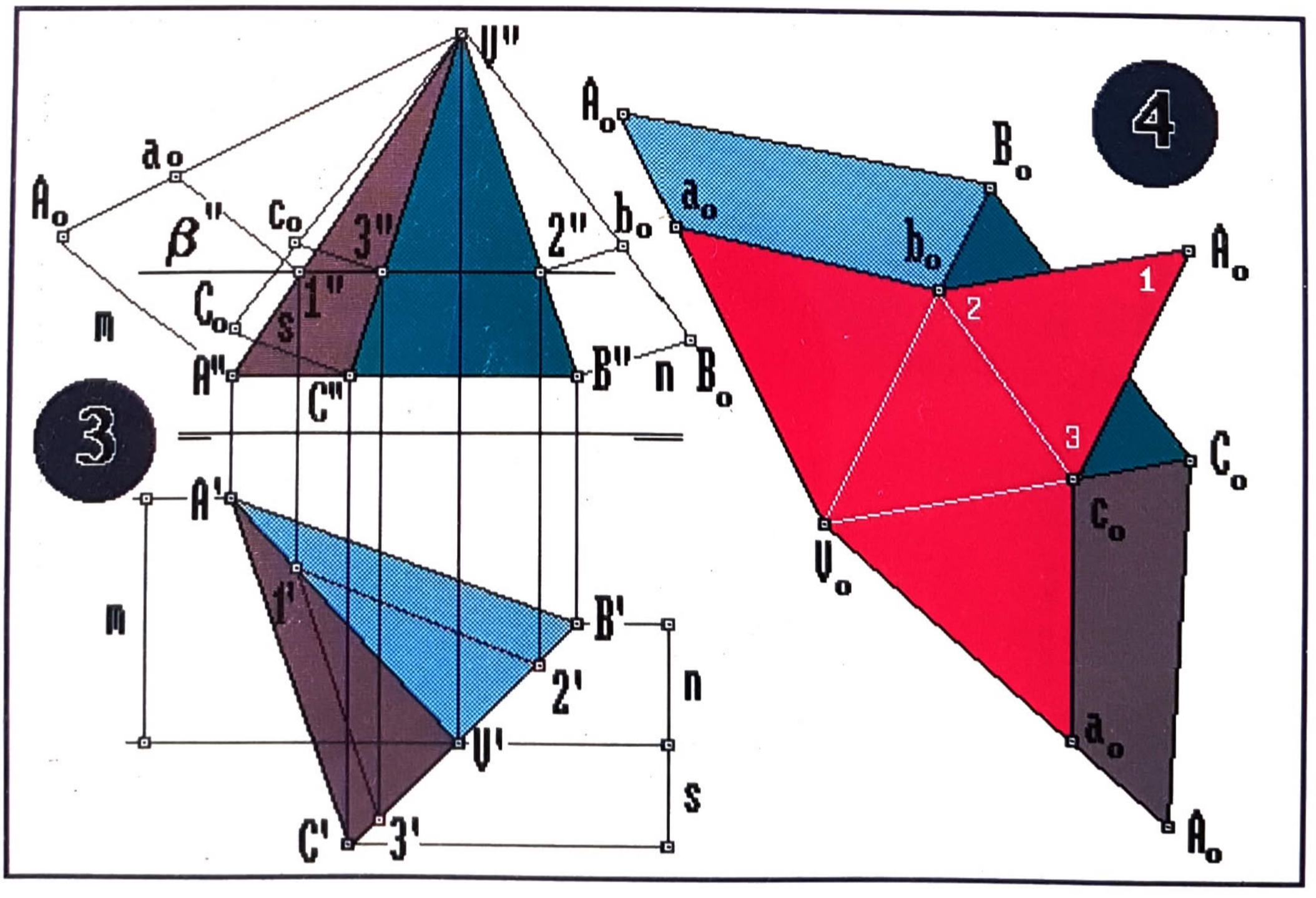
Sección producida en un cono recto de revolución por un plano de perfil.

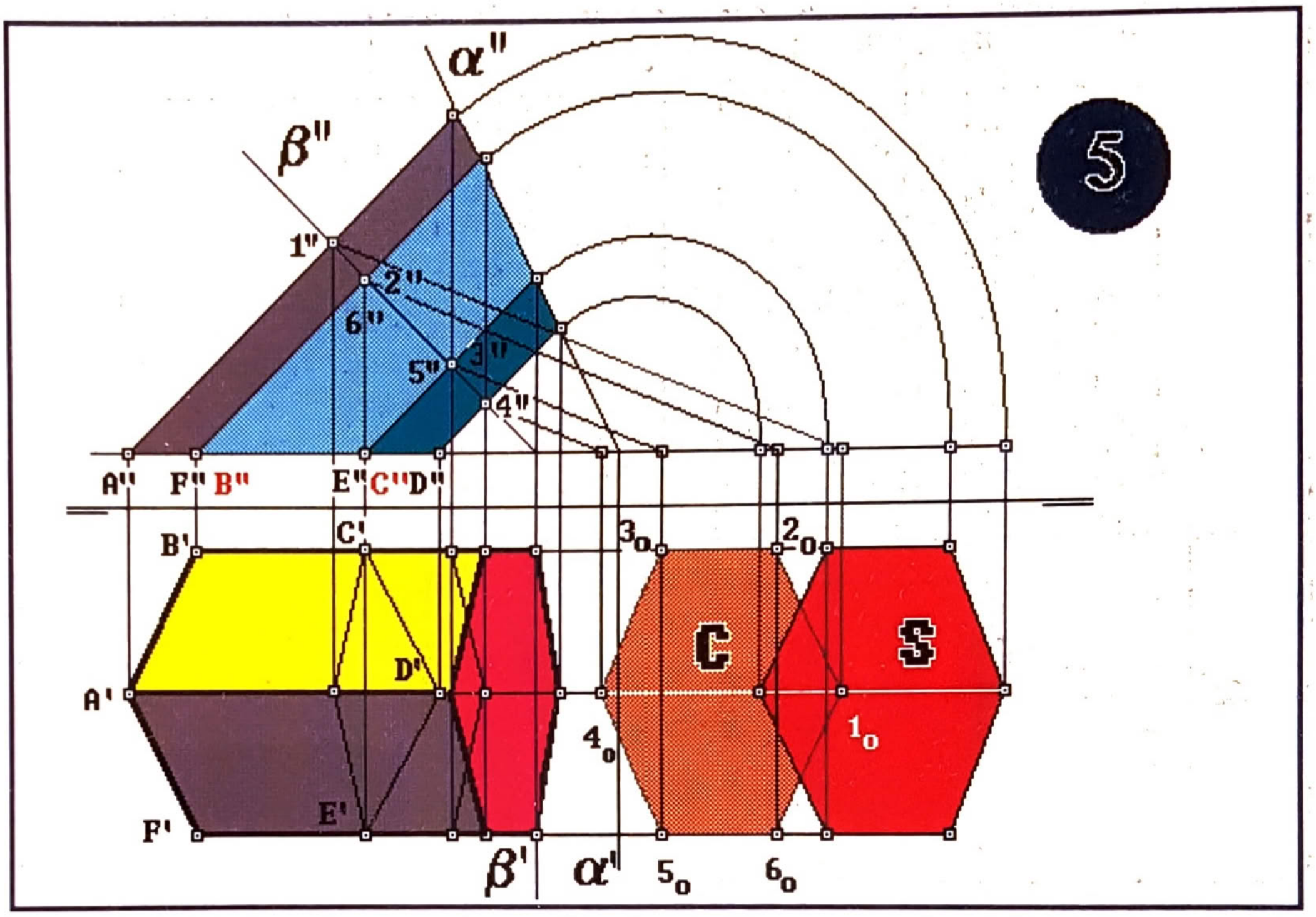
El plano β en su proyección vertical corta a las generatrices en los puntos 1-2-3-4 y 5, estos puntos se proyectarán en la vista de perfil en los puntos 1-22-33 etc.

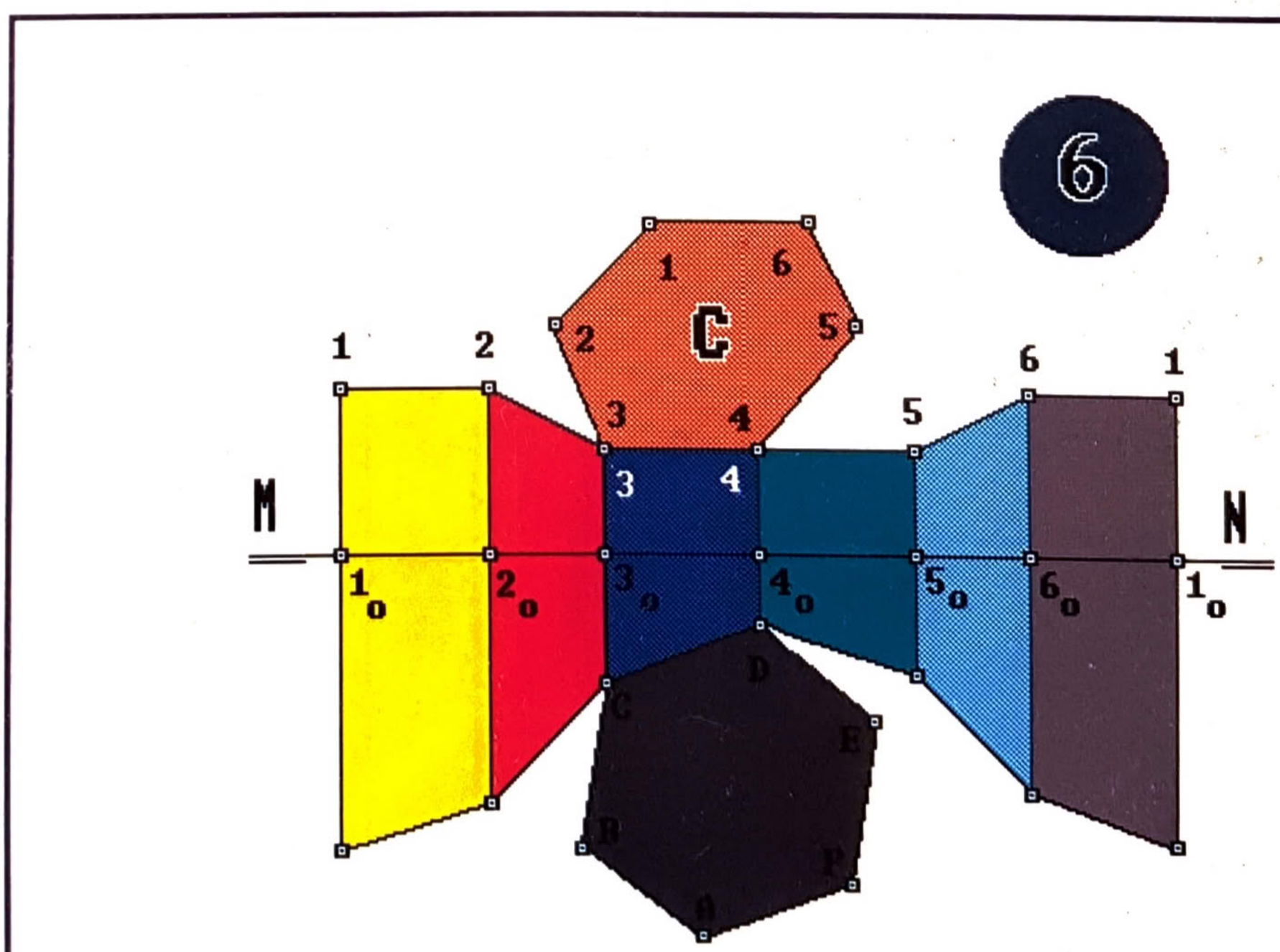
El plano β en su proyección horizontal corta a la circunferencia de la base en los puntos A y B. (El punto B se entiende simétrico de A respecto de V'1).

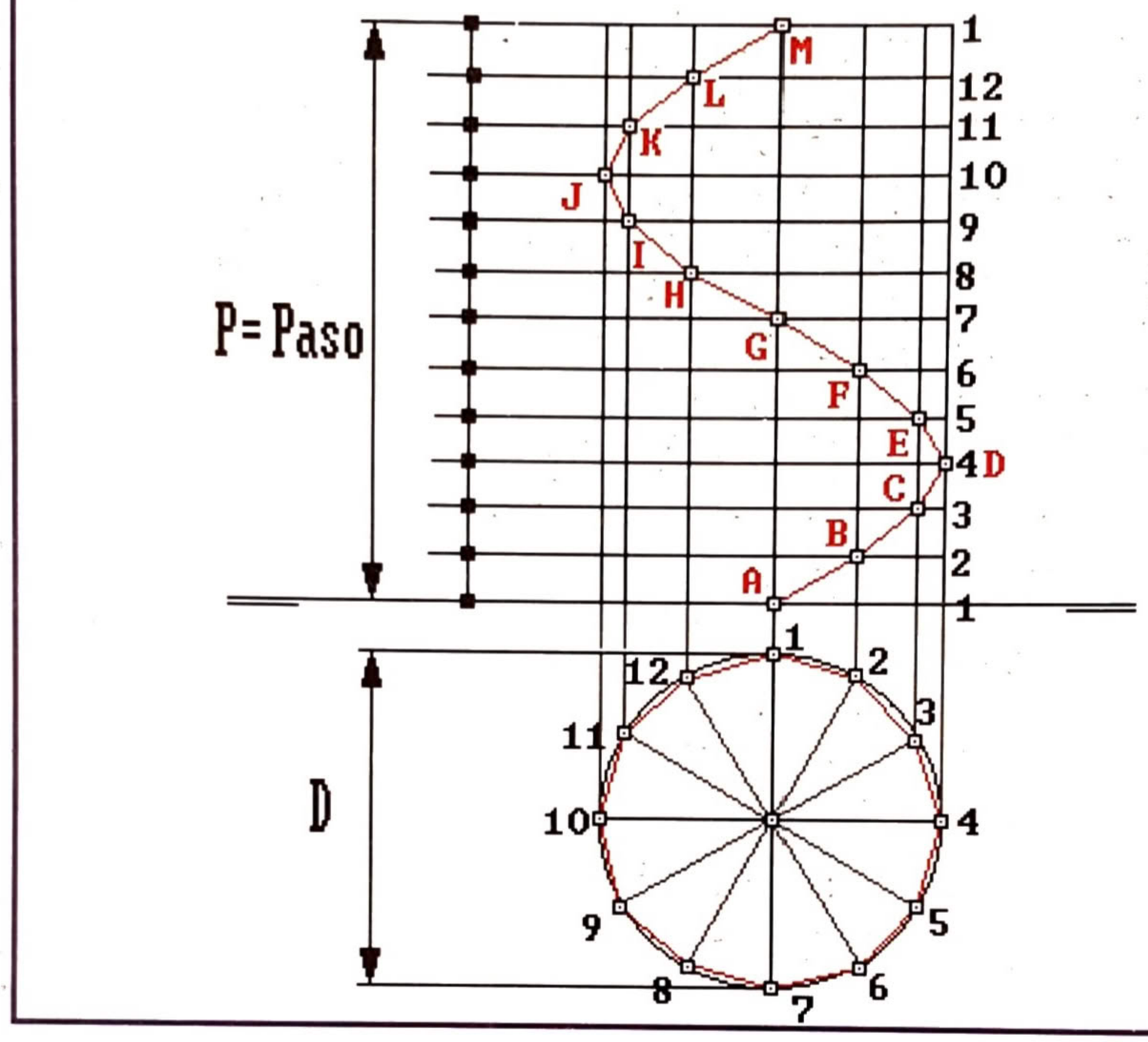
La unión de los puntos A-5-4-3-2-1-2-3-4-5 y B unidos nos darán la curva intersección entre el cono y el plano secante en nuestro caso es una "parábola".

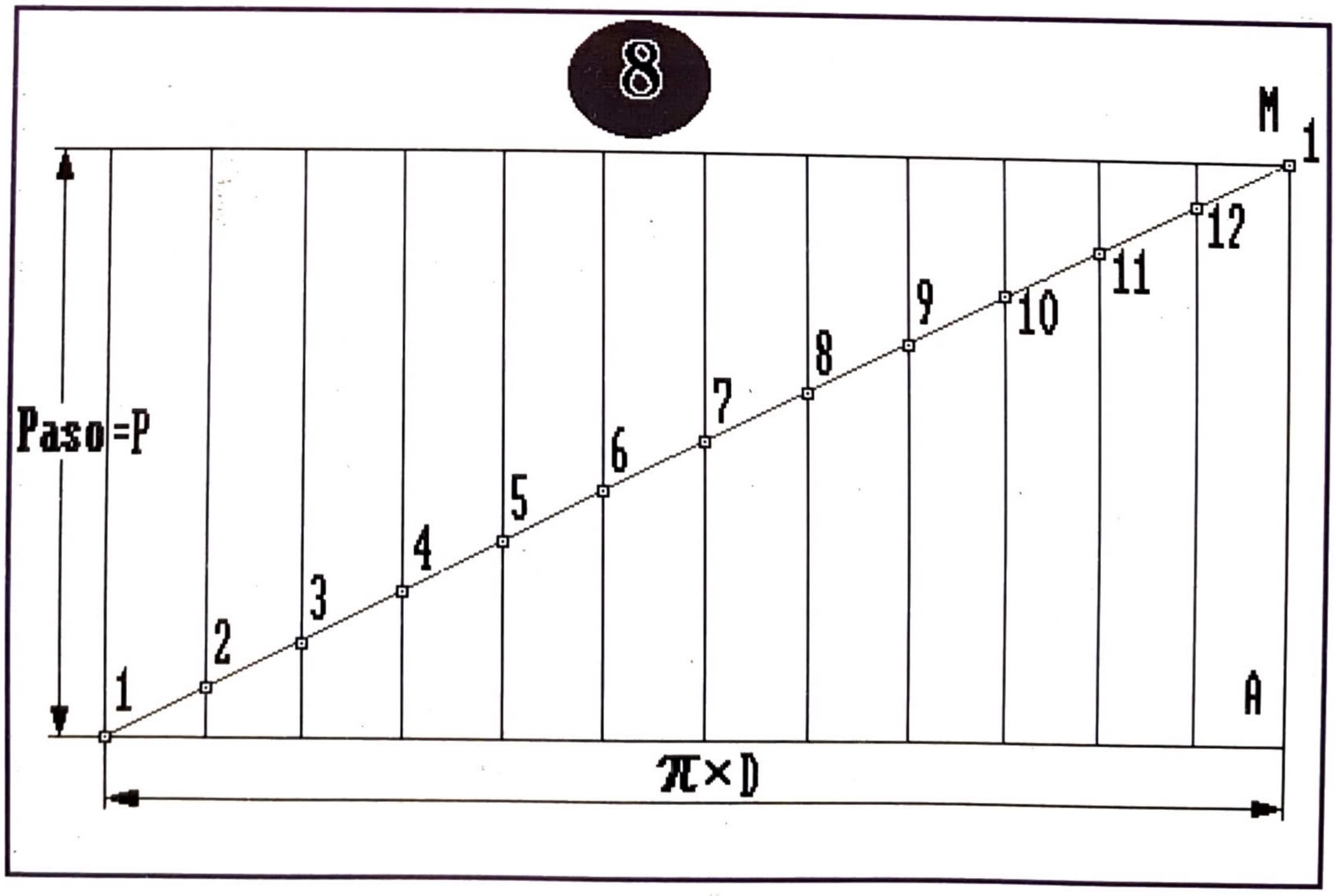

A''
B''C''
C'''
B'''A'''
A₀
B₀
C₀
A₀
3''
3'''
3₀
2''
2'''
2₀
α''
1''
1'''
1₀
1₀
3'
C'
2'
α'
1'
B'
A'
1
2

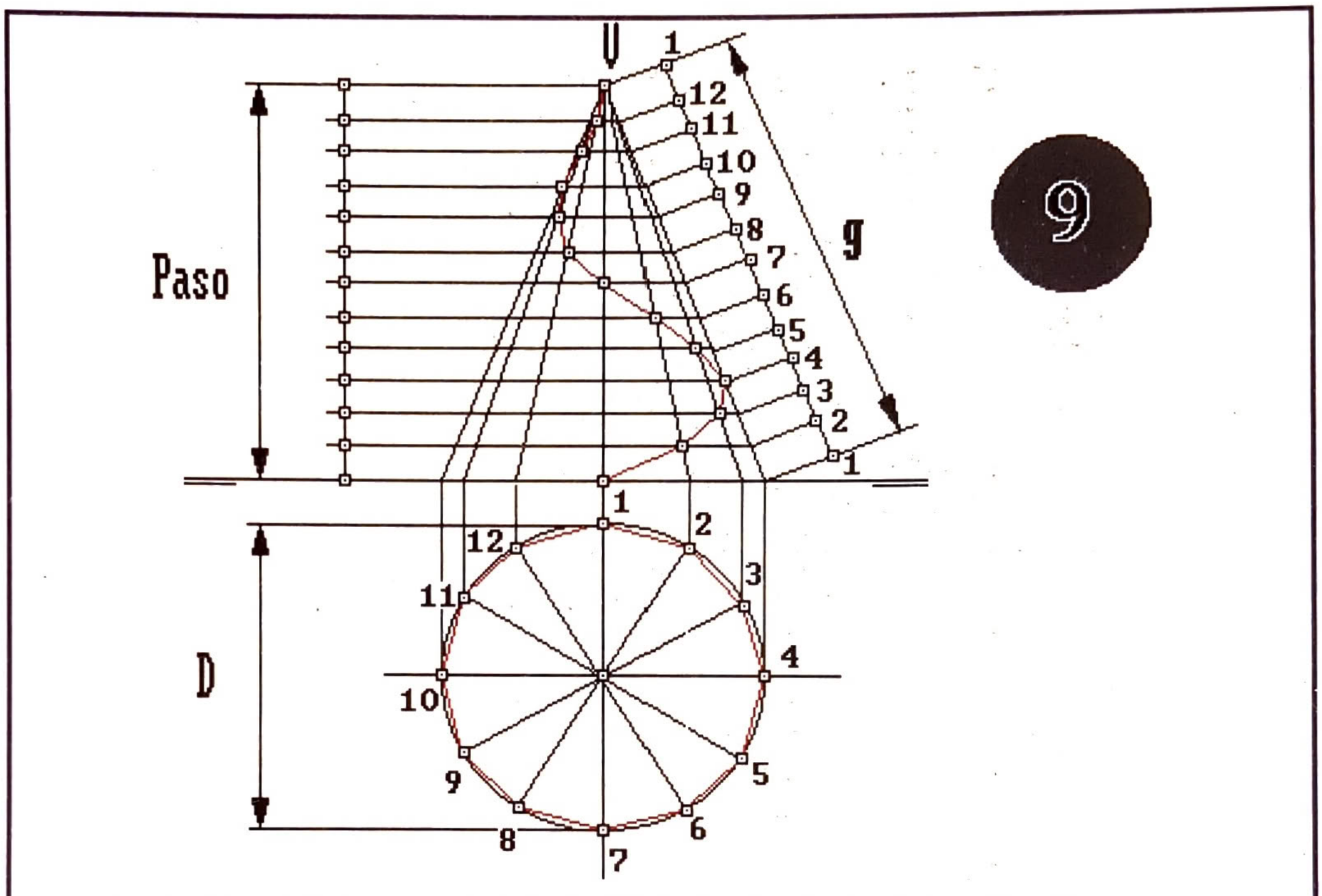

V''
a₀
A₀
β''
c₀
3''
2''
b₀
C₀
1''
s
m
A''
B''
n
B₀
C''
3
A'
1'
B'
2'
n
V'
s
C'
3'
A₀
B₀
4
a₀
b₀
A₀
1
2
3
C₀
V₀
C₀
a₀
A₀


5
α"
β"
1"
2"
6"
5"
3"
4"
A" F" B" E" C" D"
B'
C'
3o
2o
C
S
D'
A'
4o
1o
E'
F'
β'
α'
5o
6o

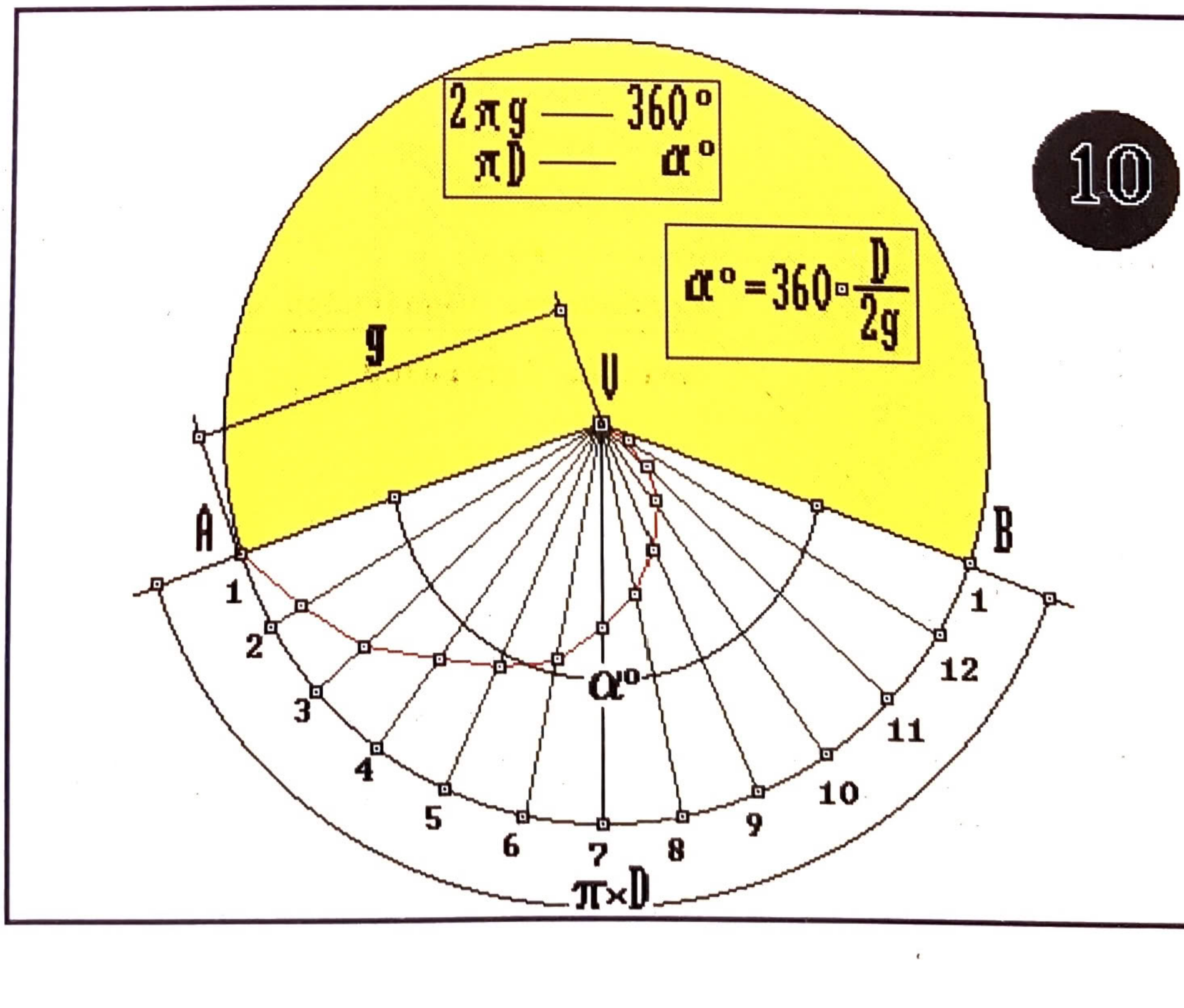

6
1
6
C
2
5
3
4
1
2
6
1
5
M
3
4
N
1o
2o
3o
4o
5o
6o
1o
D
C
E
B
F
A


7
P= Paso
M
L
K
J
I
H
G
F
E
D
C
B
A
1
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
D
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

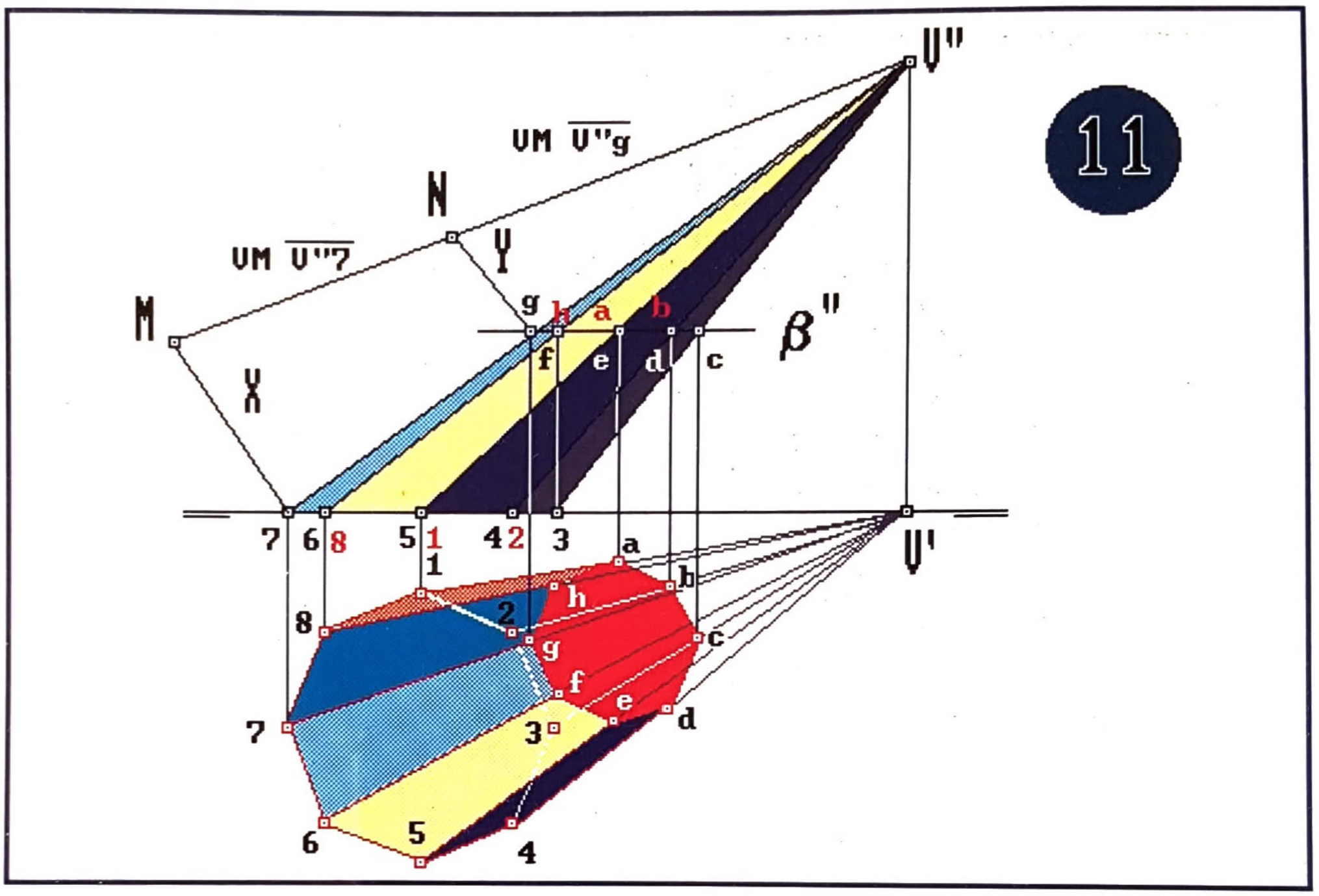

8
Paso =P
M
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
A
πxD

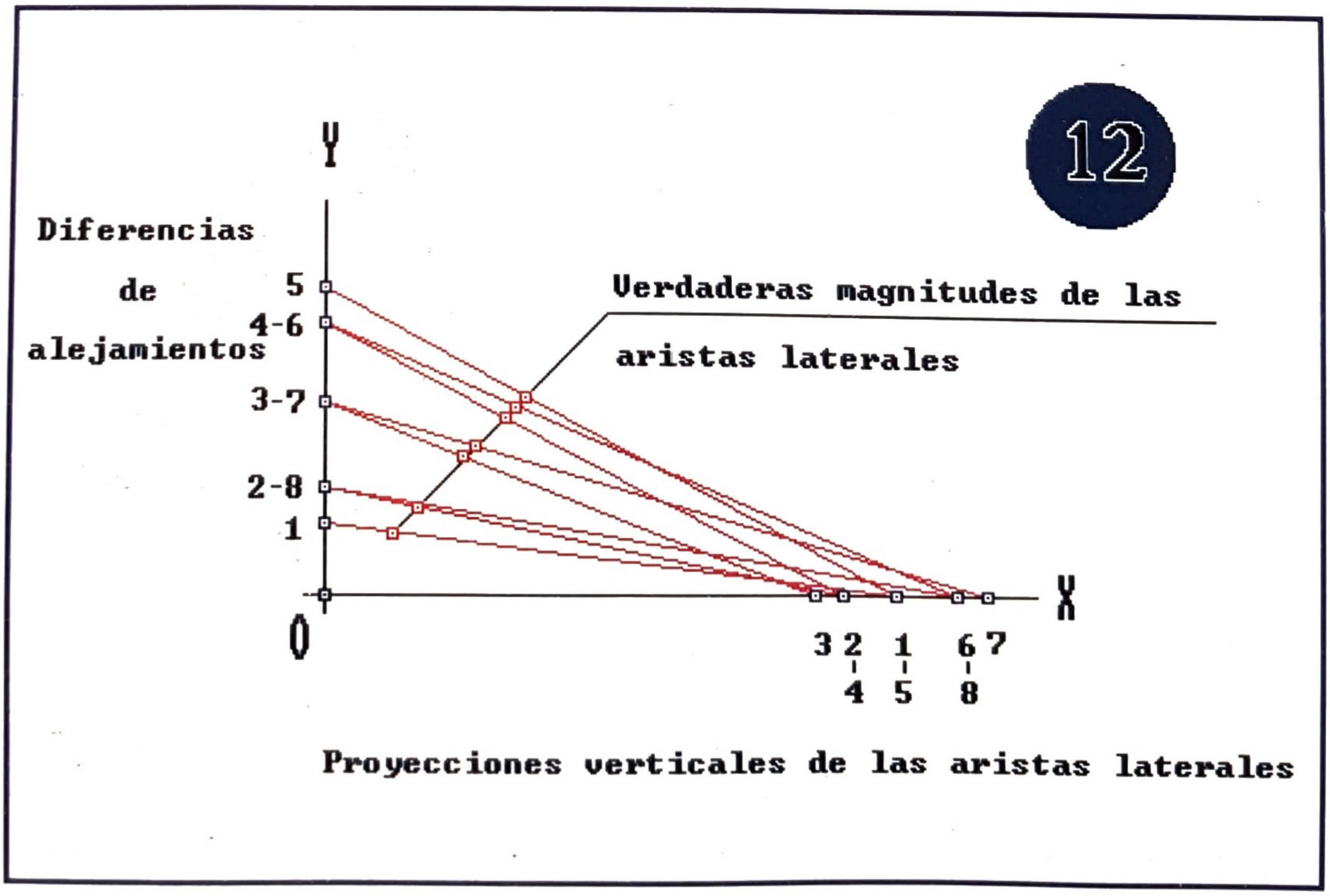

V
1
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
g
Paso
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
D

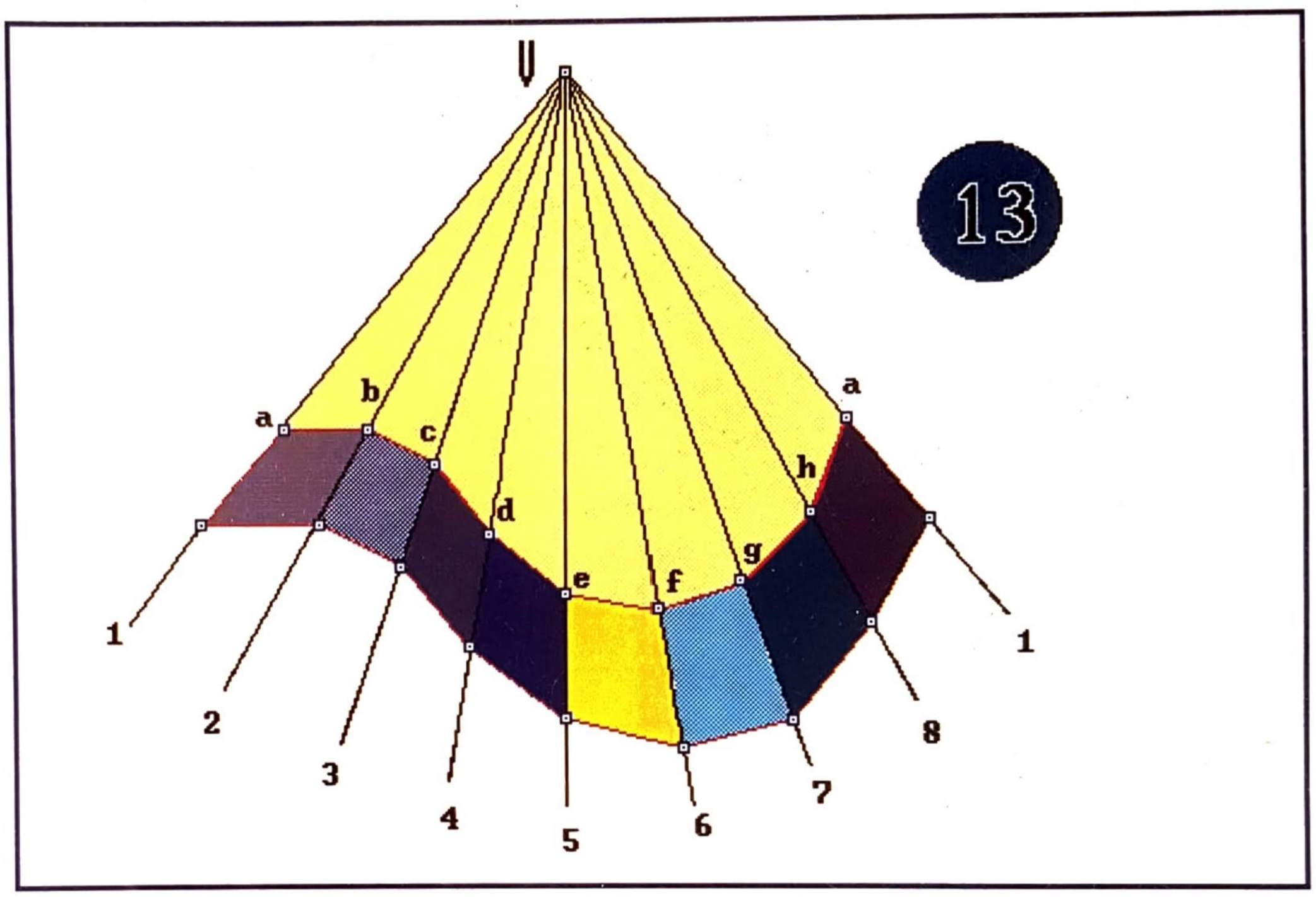
9


2πg —— 360°
πD —— α°
α° = 360 · D/2g
g
V
A
B
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
α°
πxD

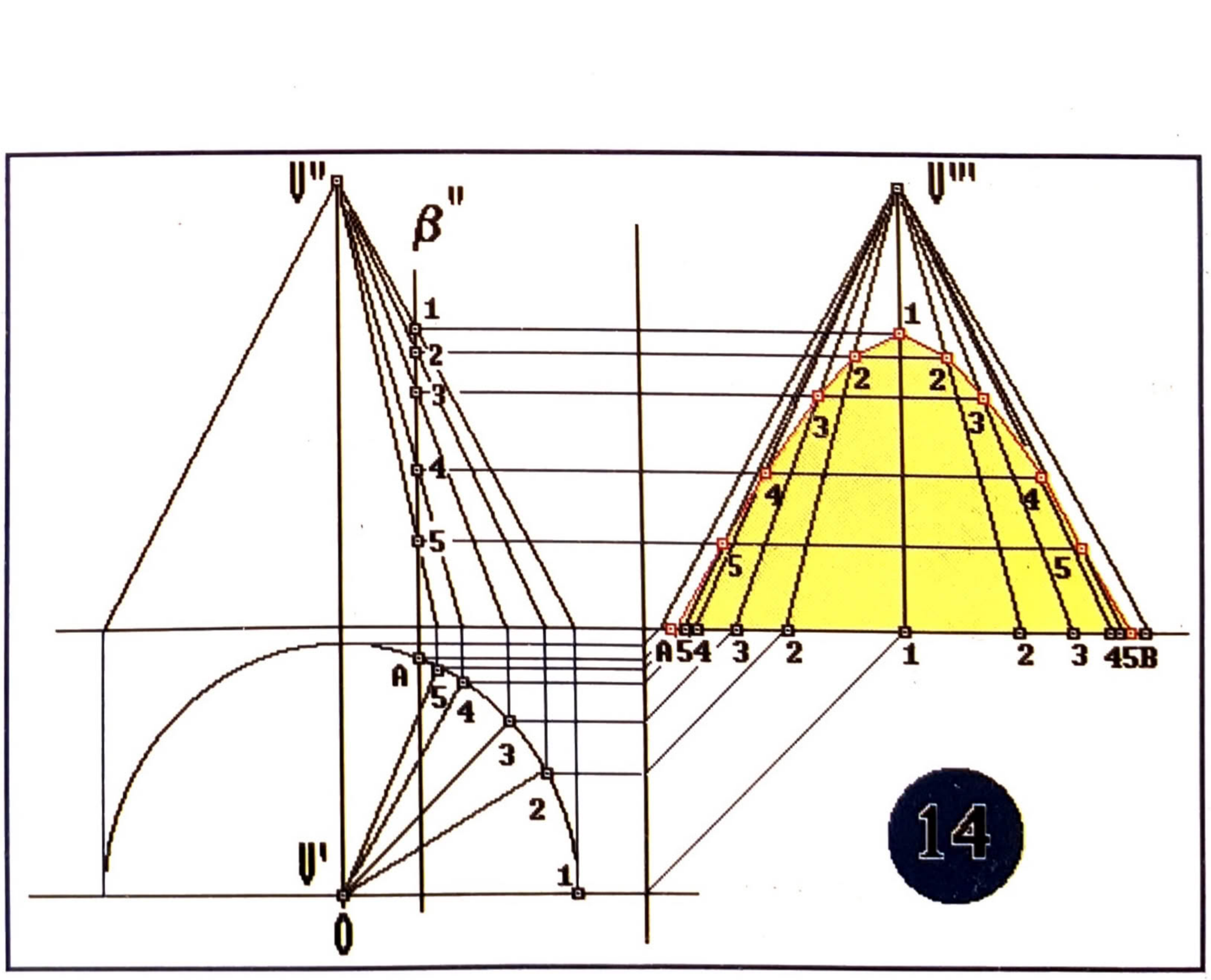
10


11
V''
VM V''g
N
VM V''7
Y
M
g
h
a
b
β''
f
e
d
c
X
7
6
8
5
1
4
2
3
a
1
h
b
2
8
g
c
f
e
7
3
d
6
5
4
V'

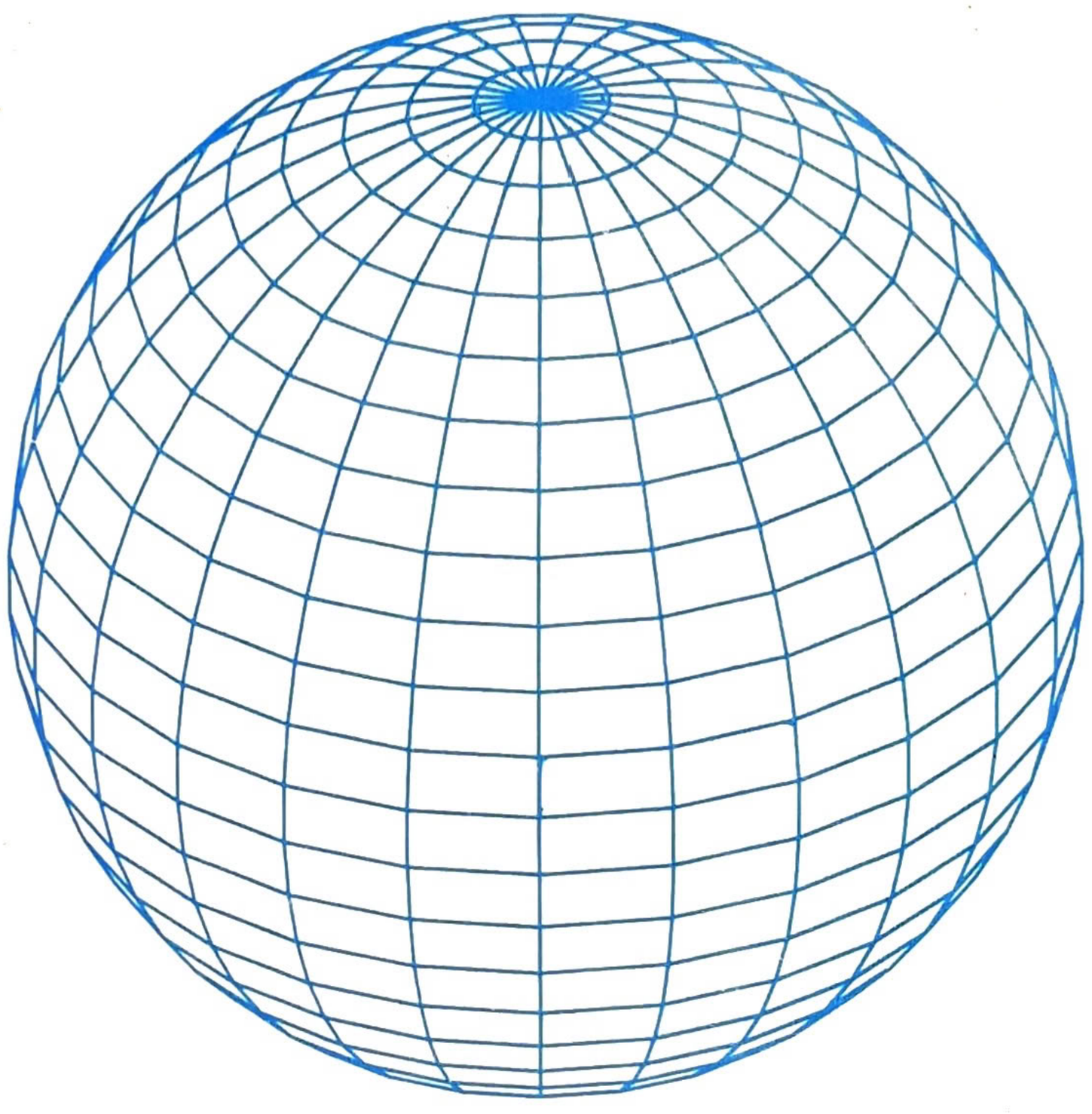

12
Y
Diferencias
de
alejamientos
5
4-6
3-7
2-8
1
0
Verdaderas magnitudes de las
aristas laterales
X
3 2 1 6 7
4 5 8
Proyecciones verticales de las aristas laterales



13



14



GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

SISTEMA DIEDRICO

¡Así, más fácil!